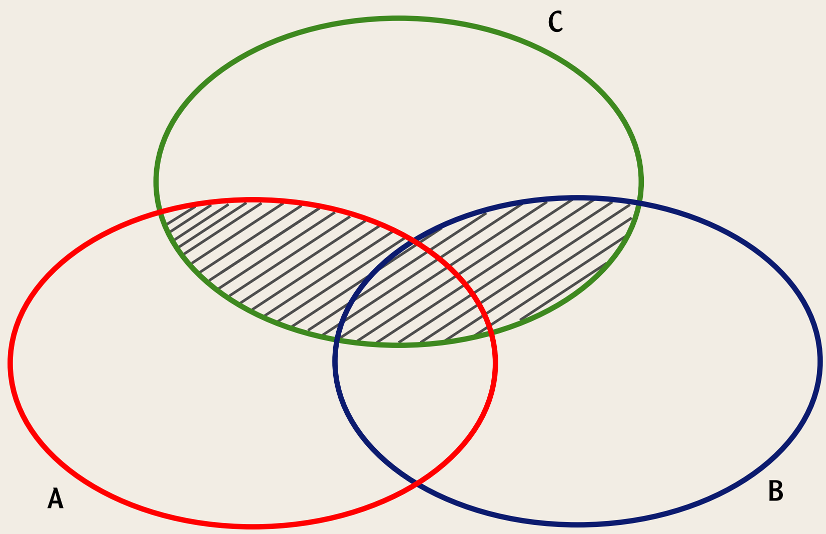
MATEMATİĞİN ÇÖZÜLMESİ İMKANSIZ PROBLEMİ

# SÜREKLİLİK HİPOTEZİ

Bilimin hemen her dalında çözülmesi çok uzun yıllar alan ve hatta hala çözülmeyi bekleyen sorular var. Matematikte de durum benzer. 300 yıldır çözülemeyen Fermat'ın son teoremi geçen yüzyılın sonlarında çözülebildi. Şu sıralar hakemlerin değerlendirmesinde olan Poincare sanısı da çözülmüş olabilir. Fakat matematik diğer pozitif bilimlerden farklı olarak problemlerin çözümlerini bulup hipotezlerin doğru olup olmadıklarını ispatlamakla kalmıyor, öyle bir soru ortaya atıyor ki o sorunun kimse tarafından çözülemeyeceğini de ispatlıyor. Adına Süreklilik Hipotezi denen bu savın doğru olup olmadığı asla bilinemeyecek. Küme kuramı içerisinde yer alan bu sanı da diğer çözülmesi çok zaman alan sorular gibi ifadesi basit ve anlaşılması kolay. Ama işin içinde sonsuz gibi akıl karıştıran bir kavram olduğundan problemin ne olduğuna bakmadan bazı konularda ve tanımlarda ortak bir fikre varmak gerekir.




## Sonsuzluk

Şüphesiz, insanları yeryüzündeki diğer canlılardan ayıran en büyük farklardan birisi de bilgiyi biriktirebilme özelliğine sahip olmaları. Biriktirilen bu bilgiler arasında sorular da var elbette ve çözülemeyen bu sorular kuşaktan kuşağa aktarılarak ilerliyor. Bilhassa matematikçilerin ve filozofların tarih boyunca kafasını karıştıran sonsuzluk kavramının öykücü M.Ö. 490'larda Zenon ile başlar. Yüzyıllar boyu süren araştırmalar sonsuzu açıklamak için pek kayda değer bir sonuç verebilmiş değil. Ta ki, 19. yüzyıla kadar. Ne ilginçtir ki, yaklaşık 2500 yıl bekleyen sonsuzluk kavramının çözüme kavuşmasında sadece bir kişinin adı geçmekte: Alman matematikçi George Cantor. Fakat Cantor matematiğe bu olağanüstü katkıları yaparken, bir yandan da ruh sağlığını kaybetti ve hayata gözlerini bir akıl hastanesinde kapattı. Üstelik onun bu bunalımlara girmesinin en büyük nedenlerinden birisi de bugün büyük çığırlar açan düşüncelerinin, çağdaşları tarafından kabul görmeyip, matematik dünyasında büyük kavgalara neden olması. Matematikçinin de aslında bir sanatçı olduğunu kabul edersek, sanatçılar için sıkça kullanılan 'öldükten sonra değeri anlaşıldı' ifadesiyle burada tekrar karşılaşmak pek de şaşırtıcı olmaz. Yine de Cantor o sanatçılardan biraz daha şanslıydı; çünkü ölmeden önce fikirlerinin biraz biraz kabul görmeye başladığına tanık olabilmişti. Bunun gerçekleşmesini sağlayan kişiyse "Cantor'un bize sunduğu cennetten kimse bizi mahrum edemez" sözleriyle onun fikirlerinin önemini her zaman vurgulayan David Hilbert.

## Kümeler

İlkokulda neredeyse her sene başında matematik derslerine aynı konu başlığını yazarak başlardık: Kümeler. Bu durum çok yakın bir zamanda değişti ve kümeler ilkokul eğitim proğramından kaldırılmaya başlamış. Okula, matematik adına toplumdan edindiği önyargılarla başlamış olan çocuklara daha en başta 'küme tanımsızdır' cümlesiyle başlayıp onları iyice korkutmamak iyi olabilir. Bunu zaman gösterecek. Peki kümeyi tanımlamayı olanaksız kılan ne?

## Küme Neden Tanımsız?

Bir kavramın tanımsız olduğu fikrini kabul etmek bir yetişkine bile zor gelir. Ama şu da bir gerçek ki, matematikte her kavramı tanımlamak olanaksız. Aslında tanımın görevi kabaca şu: onu okuyan her kişinin aklında aynı şeyin canlanması gerekir. Yani belirtilmek istenen kavramdan farklı bir ifade canlandığında tanım görevini tam olarak yerine getirmiş olmaz.

Diyelim ki, kümeyi "belirlenmiş nesnelerin bir koleksiyonu" olarak tanımladık. O zaman birisi çıkıp sormaz mı "koleksiyonun tanımı nedir" diye? Bu sorunun da altından "bir araya getirilmiş nesnelerin tümü" diye kalkmaya çalışırken bir başkası "belirlenmiş nesne de nedir" diye soracaktır. Bu soruların ardı arkası kesilmezken, dilin kelimelerin sınırlı olduğunu ve ancak sınırlı sayıda açıklama yapabileceğimizi hatırlayın. Bir noktadan sonra cevap veremez hale geleceğiz. Tabii matematikçiler böyle bir problemin ancak bir açmazla (paradoks) karşılaşınca farkına vardılar.

## Russell'ın Açmazı

Ne ilginçtir ki çok da masum görünen "belirlenmiş nesnelerin koleksiyonu" cümlesi insanı şaşırtan bir noktada küme belirtmeyebiliyor. Bertrand Russell tarafından fark edilen bu meşhur açmazın adı Rusell Açmazı. İşte bir küme belirtmeyen koleksiyonsa şu: 'Kendi kendini eleman olarak içermeyen kümelerin' kümesi: Biraz karmaşık görünen bu koleksiyonun küme belirtmemesinin açıklaması da şöyle:

Bu özelliğe sahip kümeye $R$ kümesi adını verelim. Bir nesne bir kümenin ya elemanıdır ya da değildir, başka bir koşulu yok! Öyleyse ya $R \in R$ ya da $R \notin R$:

*Eğer $R \in R$ ise kendi kendisini eleman olarak içerdiği için $R$ kümesinin özelliğine ters düşer ve onun bir elemanı olamaz; yani $R \notin R$.*

*Eğer $R \notin R$ ise kendi kendini eleman olarak içermediğinden, kendi kendini eleman olarak içermeyen kümelerin kümesi olan $R$ kümesinin bir elemanı olmaya hak kazanır ve $R \in R$.*

Yani her koşulda $R \in R$ ve $R \notin R$ ifadeleri aynı anda varolmaya çalışır ki bu da açmazın oluştuğu noktadır. Öyleyse, her nesne koleksiyonu bir küme oluşturmaz. Bu nedenle, küme kavramını tanımsız olarak bırakmak en iyisi.

## Sonsuz tek değildir!

Küme Kuramının tarihi, matematikteki diğer kuramlardan biraz farklı. Çünkü bu kuramın oluşup gelişmesi, zaman içinde pek çok kişinin katkıda bulunarak ürettiği diğerler kuramlardan farklı olarak sadece bir kişiye, George Cantor'a, atfediliyor. Sonsuzluk ve kümeler arasındaki ilişki Cantor'un 1895'te bir açmaz bulmasıyla gelişmeye başladı. Cantor'u ruhsal bunalıma iten ve çağdaşlarıyla fikir ayrılıklarına düşüren düşüncenin temelinde yatan şu:

*Sonsuz tek değildir ve hatta sonsuz tane sonsuz vardır.*

Cantor'un sonsuzları hiyerarşik bir sıraya sokan çalışmasını anlamak için, önce sonsuz kavramını nasıl tanımladığına bir bakalım. Eğer bir koleksiyon (kendisine eşit olmayan) bir alt koleksiyonuyla birebir eşlenebiliyorsa, o koleksiyon sonsuzdur ya da sonsuz sayıda eleman içerir. Matematikte önce saymaya başladığımızdan aklımıza gelen ilk sonsuzluk, doğal sayıların sınırsız olduğu. Doğal sayıların bir alt kümesi olan çift sayılar da sonsuz sayıda. Peki bu iki küme birbiriyle eşlenebilir mi? Ya da diğer bir deyişle, aynı sayıda eleman içerirler mi? Bu soruya küçük bir hikaye ile cevap verebiliriz.

## Sonsuzluk Oteli

Çok zengin bir akrabanızdan size bir otel miras kaldı. İçinde tam sonsuz tane odası olan bu oteli hayranlıkla gezerken aniden bir otobüs kornası duydunuz ve bahçeye çıkıp baktınız ki, bir otobüs dolusu müşteri. Sonsuz tane müşteri getiren otobüsü yolladıktan sonra herkesi yerleştirmeye başladınız: 1. odaya 1. kişi; 2. odaya 2. kişi;...

Sonsuz odalı otele sonsuz sayıda müşteriyi sığdırdınız. Derken lobiye indiğiniz de bir ne göresiniz? Elinde valiziyle bekleyen bir müşteriniz daha var. İçinde sonsuz tane odası olan bir otelde 'size yerimiz kalmadı' deyip çevirmek ayıp olur. Birazcık düşünüp bir yolunu buldunuz ve her müşteriyi bir yan odaya kaydırıp boş kalan 1 numaralı odaya gelen müşteriyi yerleştirdiniz. Ne de olsa sonsuza bir ekleseniz yine sonsuz.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | .. |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | .. |

Sonsuz tane iş yapmak sizi çok yordu. Tam yerinize oturup dinlenecektiniz ki bir korna daha duyuldu yine bir otobüs ve yine sonsuz tane müşteri. Ödemeleriniz olduğundan bir yolunu bulup onları da yerleştirmek istiyorsunuz. Ne yapardınız? Sonsuz çözüm bulunabilir; ama şık olan şu çözüme bakalım: Oteldeki müşterileri çift sayılı odalara kaydırıp, gelen yeni müşterileri de tek sayılı odalara yerleştirirseniz kimse açıkta kalmaz.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | .. |
| | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |

Hikaye burada bitmiyor. Otel sahibi yorgun argın merdivenlerden inerken bir de ne görsün? İçinde sonsuz tane müşteri içeren sonsuz tane otobüs! Para parayı çeker diye buna mı derler bilinmez, ama otel sahibi bu müşterileri de oteline sığdırıyor. Nasıl mı? Bunun çözümü de size kalsın.

Bu küçük hikayeden çıkaracağımız sonuç şu: Sayılabilen bütün sonsuzlar birbiriyle aynıdır. Diğer bir deyişle, tam sayılar, doğal sayılar, çift sayılar, tek sayılar, asal sayılar, negatif sayılar kümelerinin hepsi birbiriyle birebir eşlenebiliyor.

## Sonluötesi sayılar

Cantor rasyonel sayıların da sayılabilir sonsuzlukta eleman içerdiğini ispatlayarak bütün bu kümelerin eleman sayılarına $\aleph_0$ ismini verdi. Alef 0 sıfır olarak okunan bu ifade en küçük sonsuzun bir simgesi olarak matematikteki yerini almış bulunuyor.

### Alef

Alef, İbrani alfabesinin ilk harfi. Cantor, buluşunu matematikteki diğer pek çok harfli ifadeden ayırmak için Romen ve Yunan alfabelerinin dışına çıkmayı tercih etmiş. İbranice Alef '1 numara'yı da temsil ettiğinden ve keşfini matematik için yeni bir başlangıç olarak gören Cantor bu harfi sonsuzluk hiyerarşisine uygun bulmuş görünüyor.

## Sıradaki

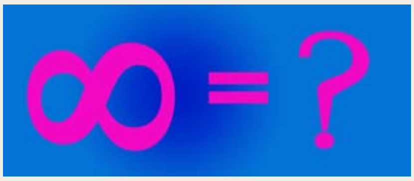
$\aleph_0$ dan sonra içgüdüsel olarak $\aleph_1$ in gelmesini bekliyoruz. Yani, doğal sayılardan daha büyük bir sonsuz. Tam sayıları ve rasyonel sayıları saydık. Elimizde sayılmayan gerçel sayılar kümesi kaldı. Yani, rasyonel sayılara irrasyonel sayıların eklenmiş hali, ya da başka bir deyişle bir sayı doğrusundaki bütün noktalar. İşte Cantor, gerçel sayıların sayılabilir sonsuzluktaki kümelerle eşleşemeyeceğini ispatlayarak, bu kümeleri içeren ve onlardan daha büyük olan başka bir kümenin varolduğunu gösterdi. Böylece, elimizde birbirinden farklı miktarda eleman içeren 2 sonsuz küme oldu.

## Süreklilik Hipotezi

İşte şimdi akla gelecek ilk doğal soru şu: Sonsuz sayıda eleman içeren bir küme var mıdır ki, eleman sayısı $\aleph_0$ dan büyük $\aleph_1$ den küçük olsun. İşte Süreklilik Hipotezi, böyle bir kümenin varolmadığını söyler. Bu sorunun da öyküsü 1940'da Kurt Gödel'in süreklilik Hipotezi'nin küme kuramı aksiyomları ile tutarlı olduğunu ispatlaması ve ardından 1963'de Paul Cohen'in bu hipotezin tersinin de küme kuramı aksiyomları ile tutarlı olduğunu ispatlaması ile son buldu. Yani, bu sorunun cevabı bilinemez, belirsizdir. Matematikteki mevcut aksiyomlarla 'böyle bir küme vardır' veya 'yoktur' şeklinde bir cevabın verilmesi imkansız!

## Sonsuz tane sonsuz

Sonsuzun tek olmadığını gördükten sonra, sonsuz tane olması fikri bizi pek şaşırtmasa gerek. $\aleph_0$ , $\aleph_1$ diye saymaya başladıktan sonra $\aleph_2$ ile devam etmekten daha doğal bir istek olamaz. Eleman sayısı $\aleph_2$ olan küme mi? O da elemanları gerçel sayıların tüm alt kümelerinden oluşan kümenin eleman sayısı, yani gerçel sayılar kümesinin kuvvet kümesidir. Bir sonraki sayının hangi kümeye ait olduğunu tahmin etmek artık zor değil.




## Yan Yatmış Sekiz

Yine de sonsuzluk bir parça da olsa gizemini ve anlaşılmazlığını korumaya devam edecektir. Onun bu durumu üniversite sıralarında öğrenciler arasında anlatılan bir fıkra ile örneklendirilir. Genel matematik dersinde öğrencilere limit konusunu anlatan profesör konuyu tamamlar ve ardından sınıfa anlaşılmayan bir yer olup olmadığını sorar. Öğrencilerden biri söz ister ve sorar 'Hocam, her şeyi anladım ama kafama bir şey takıldı sormadan geçemeyeceğim" der. Profesör sormasını ister ve öğrenci şöyle der "Hepsi tamam; ama şu yan yatmış sekiz ne anlama geliyor acaba!!?"

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com