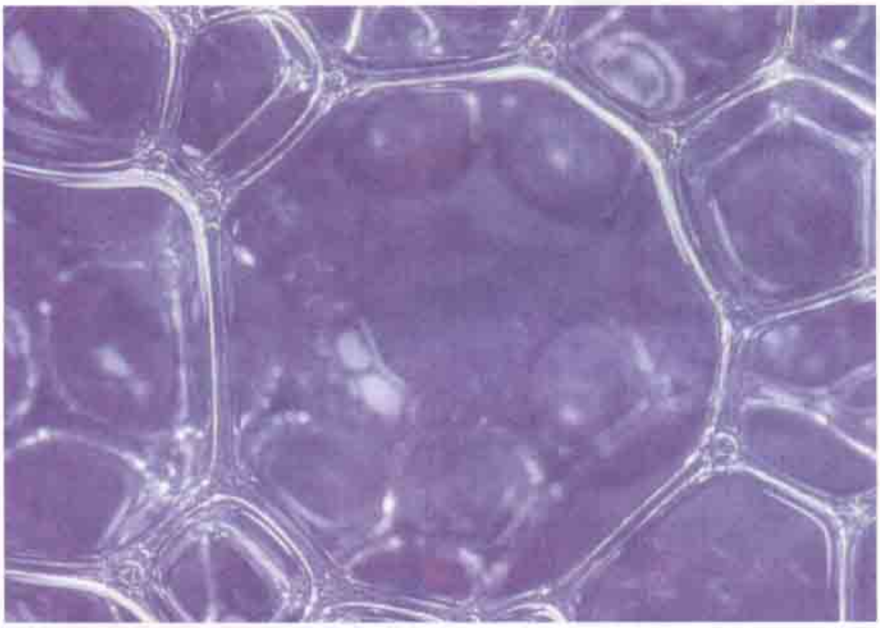
Sabun Baloncuklarıyla Deneysel Matematik



Yumurta, neden yumurta şeklindedir ya da neden balık, balık şeklindedir? Neden gezegenler ve yıldızlar bir küp ya da piramide değil de bir topa benzerler? Bal arıları, neden peteklerinde altıgen bir yapılanma izlemeyi tercih ederler? Yüzyıllar boyu bu ve benzeri soruları matematikçiler kendilerine sormuşlar ve doğanın tasarım ustalığını açıklayan bir dizi kural bulmayı ummuşlardır. İşte bu umudun peşinde koşarken karşılarına çıkar sabun baloncukları...

Bilmem hiç denediniz mi? Küçüklüğümde en zevk aldığım oyunlardan biri, sabun köpüğünden baloncuklar yapıp onları seyretmekti. Hatta bu işin turnuvasını bile düzenler, apartmanda tüm çocuklar toplanıp baloncuklar uçururduk. Diyebilirim ki, bir ara bu yarışmalar misket oynamaktan bile daha popüler olmuştu. Baloncukları aldıkları şekillere, renklerine ve büyüklüklerine göre değerlendirir, sonra da kazananı belirlerdik. Ama iddialaşmalarımız hiç bitmezdi. En çok balonu kimin uçurduğuna bir türlü karar veremezdik. Kimimiz günde bin, kimimiz yüzbin, kimimiz de onyüzbin (?!) baloncuk uçurmakla övünürdük. Tabii, o günlerde henüz "milyon"u bilmiyorduk ve ekmeğin fiyatı -eğer yanılmıyorsam- on liranın altındaydı.

Dido deriyi ince şeritler halinde kestirip, kurulacak Kartaca şehri için, en büyük alanı elde etmeye çalışıyor. (Matthäus Merian, Historische Chronica, Frankfurt a.M., 1630)

Oysa sabun baloncukları, yalnız biz küçüklerin oyun malzemesi değildi. Doğanın da oyuncağıydı, baloncuklar. Hem de son derece becerikli oyuncaklardı. Öyle ki matematikçileri bile deney tüplerinin arasına sokmayı başarmıştı. Hatta daha da iddialı bir ifadeyle, kâğıt üstünde ispatın artık son demlerini yaşadığını haber veriyordu. Scientific American yazarlarından *John Horgan* "İspatın Ölümü" adlı makalesinde, baloncuklarla uğraşan *Jean Taylor*'dan deneysel matematikçi diye bahsetmişti. Pek haksız da sayılmazdı. Ne de olsa ilk anda insanın gözü önüne, havaya baloncuklar üfleyen bir matematikçi geliyordu.

Kraliçe Dido'nun Problemi

Sabun baloncuklarının matematikle olan serüveni, çok eski yıllarda başlar. Roma mitolojisine göre Dido, Sur şehrinden Fenikeli bir prensestir. Kral olan kardeşi, kocasını öldürdüğünde şehirden kaçar ve Kuzey Afrika'da, ileride Kartaca adını alacak olan yere ulaşır. Bu bölgenin kralı, onun ve insanlarının yerleşebilmeleri için toprak satın almalarına izin verir. Fakat yalnızca bir öküz derisinin kaplayabileceği büyüklükte bir toprağı...

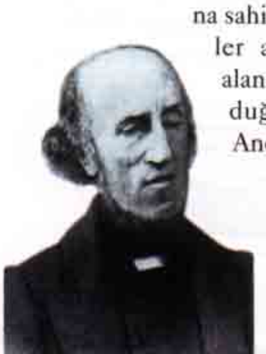
Bunun üzerine Dido, önce "kaplamak" kelimesini en geniş anlamıyla ele alır. Yanındakilere deriyi ince şeritler halinde kestirip bunları birbirine bağlatır ve uzun bir kordon elde eder. Eğer her bir şeridin çeyrek santim incelikte kesildiğini varsayarsak, 1000 ile 2000 metre uzunluğunda bir kordon çıkardıklarını tahmin edebiliriz.

Sıra bu kordonu, en geniş alanı kaplayacak şekilde yere yaymaya gelmiştir. Yerin tamamen düzgün olduğu farzedilirse, Dido'nun şu matematiksel problemle karşı karşıya olduğu söylenebilir: Verilen uzunluktaki kapalı eğriler arasında, en geniş iç bölgeye sahip olanı bulmak... Anlatılanlara göre, Dido doğru yanıtı bulmuştur. Kordonu bir çember şeklinde yere yaydırır ve 3 ile 12,5 km² arasında bir alan elde eder. Ortaçağ Avrupa'sının surlarla çevrili şehirlerine bakıldığında, kent sakinlerinin Dido'nun izinden gittiği görülebilir.

Paris'in 1576 tarihli haritası. Görüldüğü gibi Parisliler de Dido'nun izinden gitmiş.

Baloncuklar Kanun Yaparsa

Gerçi Dido doğru seçimi kısa zamanda yapmış ve eşit çevre uzunluğuna sahip düzlemsel şekiller arasında en fazla alanın daireye ait olduğunu görmüştür. Ancak matematikçiler açısından, dairenin bu özelliği için bir kanıt ortaya koymak, o kadar kolay olmaz. M.Ö. üçüncü ya da dördüncü yüzyılda Yunanlı matematikçi *Zenodoros*, bu konuda ilk girişimi yapmakla beraber, kanıtı bazı açıklar içermektedir. Bu açıklar ise ancak, 19. yüzyılda Alman matematikçi *Weierstrass* tarafından kapatılabilir.

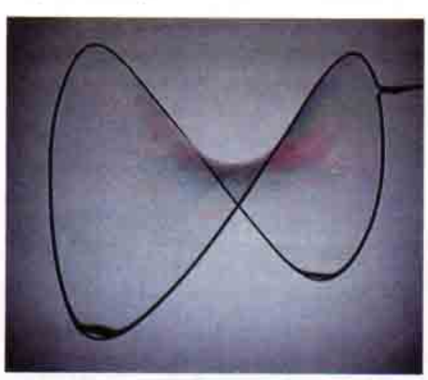


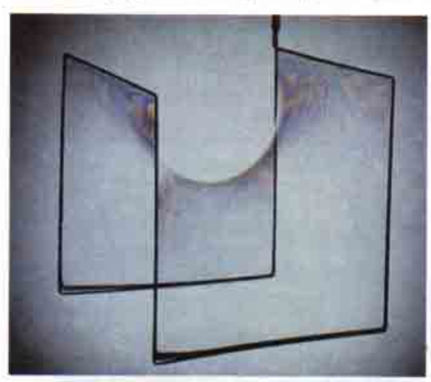
Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883)

Bu problemin üç boyutlusu olan, verilen bir hacim için en az yüzey alanına kürenin sahip olduğu gerçeğini kanıtlamak daha zordur. İlk olarak *Arşimet* bu konuyu incelemiş, 1882 yılında da Alman matematikçi *Hermann Amandus Schwarz* en küçük yüzey alanına kürenin sahip olduğunu kanıtlamayı başarmıştır.

Doğada da bu özelliği taşıyan şekillerle karşılaşabiliriz. Örneğin, hücreler ve yağmur damlaları küresel yüzeylere sahiptirler. Ancak hava akımları, yerçekimi ve moleküllerin hareketi gibi pek çok etken, bu doğal yapılarla ilgili matematiksel hesaplarımızda, bizi doğrudan uzaklaştırır. Sabun baloncuklarıyla oluşturulan küreler ise, şaşırtıcı bir şekilde, matematiksel hesaplamalara mükemmele yakın cevap verebilmektedirler.

Bir sabun baloncuğunu üflemek çok kolaydır. Ancak geçici ve kolay bozulan yapılarından dolayı onlarla sistemli bir çalışma yapmak zordur. 19. yüzyıl boyunca, Belçikalı fizikçi *Joseph Plateau* sabun baloncuklarının yapısı ve özellikleri üzerine pek çok deney yürütmüş ve dört basit sonuca ulaşmıştır. Günümüzde *Plateau kanunları* olarak adlandırılan bu dört sonuç, sabun baloncuklarının geometrik yapısını ortaya koyar:





Farklı çerçevelerde sabun zarları

- Bir sabun zarı (sabun köpüğünden elde edilen zar) düzgün parçalar topluluğundan oluşur.
- Her bir düzgün parçanın ortalama eğriliği (yani yüzeylerinin ortalama eğimi) sabittir.
- Üç sabun baloncuğunun yüzeyleri, birleştikleri yerde düzgün bir eğri meydana getirir ve 120 derecelik bir açıyla her bir yüzeyi böler.
- Ortaya çıkan altı eğri birbirlerine yaklaştıkları yerde bir nokta oluştururlar ve bu noktada her çift eğri arasındaki açı eşittir (yaklaşık 109 derecedir).


Sabun baloncukları üfleyen iki çocuğun yer aldığı vitraydan bir kesit (Cologne, yaklaşık 1530)

Bu kurallar dizisi, tüm sabun baloncuklarının -ne kadar karmaşık yapıya sahip olurlarsa olsunlar- geometrik özelliklerini açıklamaktadır. Plateau, kendi kurallarına aykırı düşen sabun baloncukları bulmak amacıyla pek çok deneye girişmiş; küp, sekizyüzlü gibi çok sayıda şekli sabun köpüklerine batırarak farklı zarlar elde etmiştir. Ancak her seferinde elde ettiği sonuçlar, ortaya koyduğu kurallarla tam bir uyum göstermiştir. Plateau kanunları, aslında tek bir prensibin sonucunda doğmuştur: Verilen bir hacim için en küçük yüzey alanını veren şekiller, sabun baloncuklarına benzerler.

Buyrun, Deneysel Matematiğe

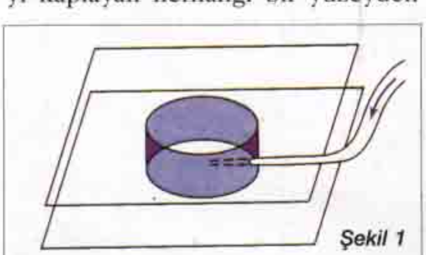
Sabun baloncuklarının bu özelliği, daha genel bir ifadeyle dile getirilebilir: Sabun zarlarını model alan matematiksel yüzeyler, en küçük alana sahip yüzeylerdir. Matematikçilerin deyimiyle, *minimal yüzeyler*dir. Minimal bir yüzey, aynı çerçeveyi kaplayan herhangi bir yüzeyden daha küçük bir alan kaplar. Yani sabun zarları, her koşulda minimal alanı kaplayan doğanın harika oyuncaklarıdır.

İşte bu nedenledir ki, sabun baloncukları "minimum-maksimum" problemleri için müthiş bir malzemedir. Yukarıda da bahsettiğimiz gibi, verilen yüzey alanı için en büyük hacim küreye aittir. Doğada ise küresel yüzeyi en iyi sağlayan yapılardan biri, yine sabun baloncuklarıdır. Verilen yüzey alanı için en büyük hacmi bulma problemini, bir takım sınır koşulları ekleyerek değiştirmek de mümkündür. Nasıl mı? İki paralel düzlem arasına sıkıştırılmış bir cisim düşünün. Diyelim ki, cismin her iki düzleme de dokunmayan yüzey alanı *indirgenmiş yüzey alanı* olsun. *Verilen indirgenmiş bir yüzey alanı için, iki düzlem arasına sıkıştırılmış en büyük hacme sahip cisim nedir?* Diğer bir deyişle, *sıkıştırılmış ve sabit hacme sahip cisimlerden hangisi en küçük indirgenmiş yüzey alanına sahiptir?*

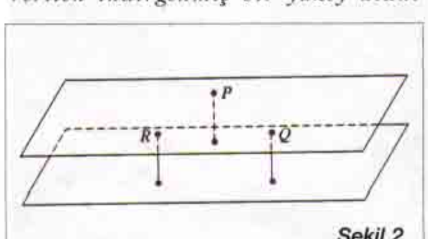
Bu problem, deneysel olarak çözülebilir. Yapmamız gereken, iki ıslak düz camın arasına bir sabun baloncuğu üflemektir. Önce baloncuk, tek ıslak camın üzerinde yarım bir küre şeklini alır. Bu yarım küreye daha fazla hava üflediğimizde baloncuk büyür ve diğer ıslak cama ulaşır. Sonunda, her iki cama da dik bir silindir karşımıza çıkar. Yani, doğru cevap silindirdir (Şekil 1).

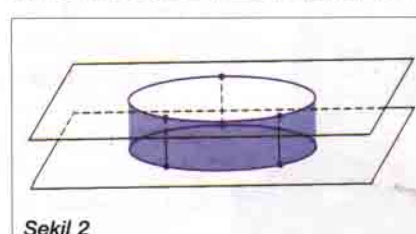
Bu "ıslak cam ve baloncuk deneyi", başkaca matematik problemlerini yanıtlamak için kullanılabilir. Bunlardan birisi de Steiner'in problemidir. Bu problem, 1646 yılında Fransız matematikçi *Pierre de Fermat* tarafından ortaya atılmış ve Berlin Üniversitesi'nde profesör olan *Jacob Steiner* tarafından düzenlenmiştir. Steiner'in probleminde P, Q ve R şehirleri bir yollar sistemiyle birbirine bağlıdır. Hiç bir engelin bulunmadığı ve şehirlerin çevresindeki toprakların düzgün olduğu varsayılarak, istenen yere yol inşa edilebilmektedir. Problem, şehirleri birleştiren en kısa uzunluktaki yol sistemini bulmaktır. Bu problemi, elementer geometriyle çözmek mümkündür. Ancak aynı yanıtı, "ıslak cam ve sabun baloncuğu" deneyimiz de verir:

Yine iki ıslak cam alalım ve bunları üç iğneyle birbirine birleştirelim. Koşulumuz: Bu üç iğnenin birbirine paralel, eşit uzunlukta ve her iki cam düzleme de dik olması... Daha sonra bu iki ıslak düzlem arasına, her

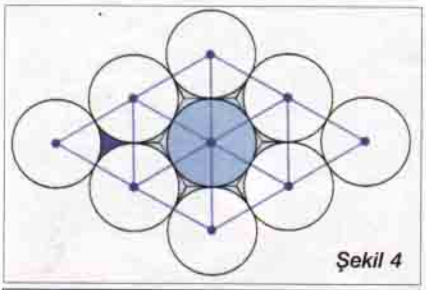


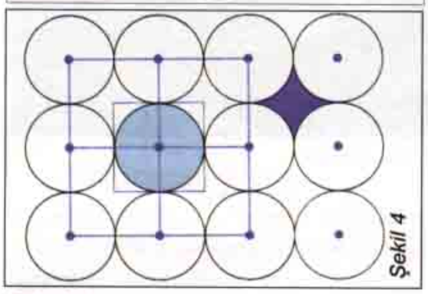
Bir sabun baloncuğuyla silindirin elde edilmesi



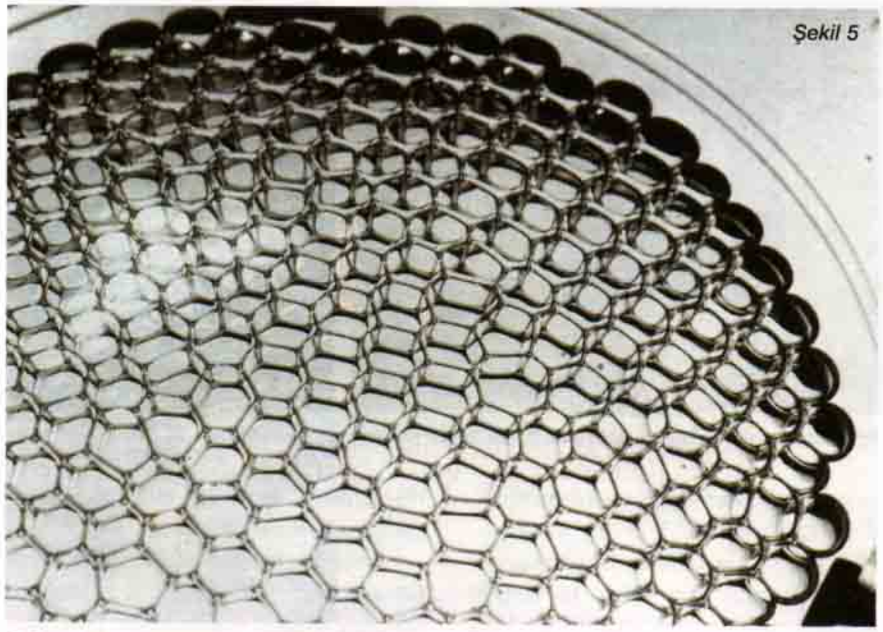


Steiner'in probleminin baloncuklarla çözümü. Sağda, iki düzlem arasında bulunan her üç iğneyi de içerecek şekilde, silindirik bir sabun baloncuğu görülüyor.





Dairelerin en sık dizilimleri. Altıgen bir dizilim, karesel bir dizilime göre daireler arasında daha az yer bırakır.



Sabun baloncuklarının iki paralel düzlem arasında aldıkları altıgen şekiller.

üç iğneyi de içerecek şekilde, silindirik bir sabun baloncuğu üfleyelim (Şekil 2). Ardından üflediğimiz kamışla, baloncuğun içinden yavaşça havayı çekmeye başlayalım. Silindirik şeklimiz devamlı değişecek ve çeşitli figürlere büründükten sonra iki cam düzlemi de dik kesen üç adet sabun zarı oluşacaktır. Şimdi eğer herhangi bir camı ele alır ve iğnelerin bu cama değdikleri noktalara P, Q, R diyecek olursak, yanıtımız ortaya çıkar: Sabun zarlarının cam düzeyle oluşturduğu doğrular, üç noktayı birleştiren en kısa uzunluktaki sistemdir (Şekil 3).

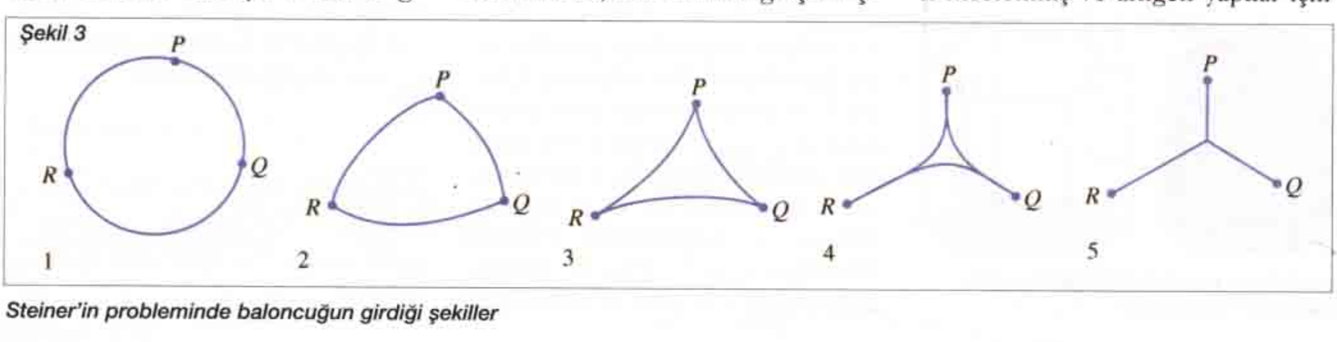
İşte bir başka problem: Eşit boyutlardaki silindirleri bir düzlem üzerine koyup, onları mümkün olduğunca az yer kaplayacak şekilde dizmeye çalışalım. Bu uğraşımızın sonucunda karşımıza altıgen bir yapı çıkar (ya da en azından çıkması gerekir). Çünkü bu yapı, aynı boyutlardaki dairesel şekillerin bir düzlem üzerinde olabilecek en sık dizilimlerini sağlar. (Şekil 4'te ortada yer alan daire, tam altı daireye birden değmektedir.) İşte bu yüzdendir ki, doğada altıgenlere, 120 derecelik açılara ve Y şekline sıkça rastlanmaktadır.

Eşit boyutlardaki toplar iki düzlem arasına sık bir şekilde dizildiklerinde, ortaya yine altıgen bir şekil çıktığı görülür. Diyelim ki, toplarımız canlı birer hücre olsun ve her biri aynı oranda mümkün olduğunca genişlemeye çalışsın. O zaman açıkça anlaşılacağı üzere, altıgen hücreler oluşacaktır. Aslında bu durum, hücre büyümesinde sıkça görülür ve hücreler genelde altıgen şekillere kavuşurlar.

Ancak altıgen yapı, çok farklı bir şekilde de elde edilebilir. Yapmamız gereken sadece, eşit boyutlardaki sabun baloncuklarını iki cam düzlem arasına üflemek olacaktır. Eğer yeteri kadar üflersek (onyüzbinden az bir sayıda ve eşit boyut koşulunu sağlamak için homojen üflemelerle), baloncuklar birleşirler. Her ne kadar bu işlemi gerçekleştirmek, homojen üflemeyi henüz öğrenememiş benim gibi canlılar için mümkün gözükmese de, bu durumun gerçekleştiği varsayılabilir. Öncelikle bu baloncuklar, iki düzlem arasını tam olarak doldurduklarından, her iki düzlemle de dik açı oluştururlar. Plateau kanunlarından da hatırlanacağı gibi, her üç baloncuk arasında da 120 derecelik bir açı vardır. Her bir baloncuk aynı boyutlara sahip olduğundan, komşu hücreler arasında bir basınç farkı oluşmaz. Sonuçta içteki sabun zarları sıfır ortalama eğrilik gösterirler ve düzlemsel yüzeylere kavuşurlar. Artık elimizde bir altıgen baloncuklar dizisi vardır. Yalnızca en dışta kalan baloncuklara bir baskı olmadığından, bunlar kısmen silindirik formlarını korurlar (Şekil 5).

Arıların Karnesi

Öte yandan altıgen yapıya sıkça rastlamamıza neden olan bir başka öğe daha vardır: Bal arıları. Bal peteklerinde görülen altıgen formların mükemmel uyumu, insanları her zaman büyülemeyi başarmıştır. Eski Yunanlılar'dan bu yana, bal petekleri incelenmiş ve altıgen yapılar için



Steiner'in probleminde baloncuğun girdiği şekiller

Tom Noddy'nin baloncuklarla elde ettiği kübik ve oniki yüzlü şekiller

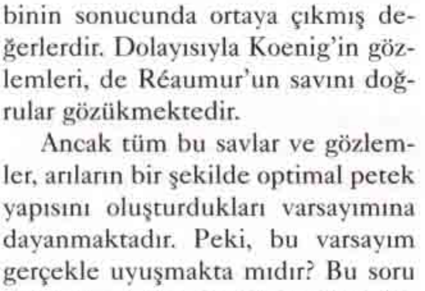
Cam üfleme

çeşitli sebepler ortaya sürülmüştür. Fransız fizikçi *R. A. F. de Réaumur* (1683-1757), arıların en az balmumunu kullanmak için böyle bir yapıyı tercih ettiklerini öne sürmüştür. Yani altıgen yapı, arılar için en ekonomik yapıdır. De Réaumur bu savını *Samuel Koenig*'e de açıklamış, Koenig de bal hücrelerinin 120 ve 109 derecelik açılar meydana getirdiğini görmüştür. Hatırlanacağı gibi, bu açılar Plateau kanunlarında da yer almaktadır ve en az alanı kaplama prensibinin sonucunda ortaya çıkmış değerlerdir. Dolayısıyla Koenig'in gözlemleri, de Réaumur'un savını doğrular gözükmektedir.

Ancak tüm bu savlar ve gözlemler, arıların bir şekilde optimal petek yapısını oluşturdukları varsayımına dayanmaktadır. Peki, bu varsayım gerçekle uyuşmakta mıdır? Bu soru 1964 yılında Macar matematikçi *Fejes Tóth* tarafından incelenmiş ve Tóth elde ettiği sonuçları "Arıların Bildikleri ve Bilmedikleri" adlı bir çalışmada toplamıştır. Tóth, peteği *hücre* adını verdiği denk dışbükey (konveks) çokyüzlülerden oluşmuş bir küme olarak kabul eder. Bu hücreler birbirleriyle kesişmeden ve aralarında boşluk bırakmadan iki paralel düzlem arasını doldururlar. Aynı zamanda her bir hücrenin, bu iki düzlemden yalnızca biri üzerinde yüzlerinden biri görünür.

Arılar tarafından oluşturulan hücreler şeffaf kanallardır ve yüzleri düzgün altıgen şeklindedir. Aynı zamanda altları da üç eşit eşkenar dörtgenden oluşur. Arılar peteklerini, hücrelerin altıgen yüzleri düzlemlerden yalnızca birine değecek şekilde inşa ederler. Peki, ortaya çıkardıkları bu yapı onlar için en ekonomik tercih midir? (Şekil 6)

Bu soruyu matematiğin diliyle anlatmak da mümkündür: *Verilen H ve G sayıları için, hücreleri en az yüzey alanına sahip G genişliğinde ve H hacmindeki petek nasıl bir yapıdır?* (G genişliği, peteği sınırlayan paralel iki düzlem arasındaki uzaklıktır.)



Şekil 6

Solda bir bal peteği hücresi ve sağda Fejes Tóth'un hücresi

Yüncü Kilimi (19. yüzyıl)

Henüz bu soru yanıtlanabilmiş değil, ama cevabın arıların oluşturduğu petekler olmadığını kesinlikle biliyoruz. Çünkü Tóth arıların yaptığı hücrelerden daha iyi sonuç veren bir başka hücre bulmayı başarmıştır. Bu hücrenin alt kısmı, iki altıgen ve iki de eşkenar dörtgenden oluşmaktadır. Tóth'un hücrelerinin her bir yüzü de arılarınkine göre %0.35 daha az alan kaplamaktadır. Dolayısıyla arıların çok iyi bir iş çıkardıklarını ve karnelerindeki matematik notlarının oldukça yüksek olduğunu söyleyebiliriz. Ancak arılar, en yüksek notu ve sabun baloncuklarının başarısını henüz yakalayabilmiş değildir.

Son Baloncuk

Bilirsiniz, çizgi romanlarda karakterler baloncuklarla konuşturulur. Son baloncukları okumak, çoğu kez çocukları üzer (en azından beni üzerdi). Artık serüven bitmiş ve Red Kit "Yalnız Kovboy" şarkısını söylemeye başlamıştır. Oysa sabun baloncukları için, henüz "son baloncuk" konulmuş değil ve onlarla matematikçilerin paylaşacağı daha pek çok macera var. Sonunda John Horgan'ın dediği gibi, kağıt üstünde ispatlar son mu bulur, bilinmez. Ama farklı bir son olacağı muhakkak...

Han Nazmi Özsöylev

Kaynaklar
Hass, J. ve R. Schlafly, "Bubbles and Double Bubbles", American Scientist, Eylül-Ekim 1996
Hilderbrandt, S. ve A. Tromba, The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World, Springer-Verlag, New York, 1996
Horgan, J., "The Death of Proof", Scientific American, Ekim 1993
Lovett, D., Demonstrating Scince with Soap Films, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1994