MATEMATİKTE ÇİZGE KURAMI - II

RAMSEY KURAMI VE RAMSEY SAYILARI

İki kardeş anne ve babalarını tatile gönderdikten sonra evde 6 kişilik ufak bir parti yapmaya karar verirler. Fakat aralarında bir anlaşmazlık çıkar. Kardeşlerden büyük olanı çağıracakları kişilerin hepsinin birbirini tanımasından yanadır. Böylece daha samimi ve eğlenceli bir ortam yaratabilirler. Öteyandan küçük kardeş birbirini hiç tanımayan arkadaşlar davet etmek niyetindedir. Bu sayede herkes yeni arkadaşlar edinip çevresini genişletme fırsatı bulur. Büyük kardeş 'ben büyüğüm benim dediğim olsun' dese de küçük kardeşinin ailesine haber verme tehtidini göze alamaz. Uzun tartışmaların sonunda bir anlaşmaya varan kardeşler çağıracakları kişileri kura yolu ile belirlemeye karar verir. Sonuç olarak rastgele seçilmiş 6 davetlinin oluşturduğu bir parti düzenlemeye koyulurlar. Bu partide kaç kişinin birbirini tanıyacağı ya da tanımayacağı hakkında kesin olarak ne söylenebilir dersiniz?

Dört Renk Teoremi

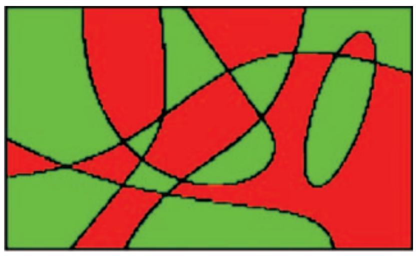
Matematikçiler kesin bilgiler vermekten hoşlanır. Adına teorem dedikleri bu bilgilerin kesinliğini verdikleri ispatlarla garanti ederler. Yine matematikçilerin ilgilendikleri diğer bir konu da her duruma uyan en ekonomik çözümün ne olduğunu belirlemektir. Bunun en popüler örneklerinden biri dört renk teoremidir. 1852'de matematikçi Francis Guthrie, ülkelerin bulunduğu bir haritayı boyarken 4 rengin yeterli olduğunu farkeder ve 'acaba düzlemde çizilmiş herhangi bir haritayı (komşu iki ülke aynı renkte olmayacak şekilde) boyamak için her zaman 4 renk yeterli olur mu' sorusunu gündeme getirir. Zamanın matematikçileri arasında dolaşan ve bir türlü çözüme kavuşamayan bu problem o günden sonra uzun bir süre çözülemeyen sorular listesini meşgul etti. En sonunda 1977'de Appel ve Haken'ın bir parçasında bilgisayar yardımı kullandıkları ispat gösteriyordu ki gerçekten de nasıl bir harita çizerseniz çizin, onu en fazla dört renk kullanarak renklendirebileceğiniz bir yol vardır!

En Az!

20. yüzyılın ilk yarısında yaşamış olan ve 26 yaşında hayatını kaybeden İngiliz matematikçi Frank Ramsey, adını taşıyan ve 'bir yapıda belirlenmiş bir özelliğin var olması için en az kaç eleman kullanılması yeterlidir' sorusunu temel alan bir teori geliştirmiştir. Bu ifadeyi "bir işi garantiye almak için en az kaç eleman kullanmak yeterlidir" şekline dönüştürürsek işimize yarayabilir. Çünkü bizim de merak ettiğimiz, iki kardeşin düzenlediği partiye gelen 6 konuktan en az kaçının birbirini tanıdığı ya da tanımadığının garanti edilebileceği meselesidir.

3 Kişi Garanti!

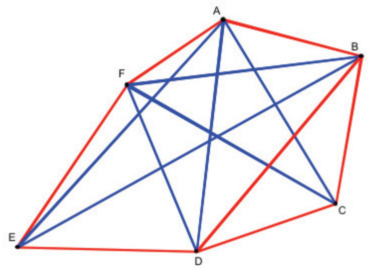
Bu iki kardeşin yaptıkları partide ya birbirini karşılıklı tanıyan ya da tanımayan 3 kişi bulunacağı garantidir. Hatta bunu kesin kılabilmek için en az 6 kişilik bir parti yapmak gereklidir. Sözgelimi 5 kişilik bir partide böyle bir ilişkiyi garanti edemezsiniz. Buna uyan durumlar bulunabilir. 5 tane birbirini tanıyan kişi çağırırsanız birbirini tanıyan 3 kişi zaten olacaktır. Ama hedef her örneği kapsayan minimum sayıyı bulmak olduğundan 5 aranan sayı değildir. 4 renk problemi için de benzer bir mantık kurulabilir. Örneğin 2 renkle boyayabileceğiniz haritalar da vardır ama 4 renk, her çeşit haritayı boyamaya yeterli en küçük sayıdır, 5 veya daha fazla boyaya ihtiyaç duyulmayacağı garanti edilmektedir.

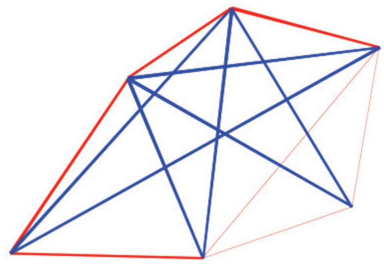


iki renkle boyanabilen bir harita

Tanışmak ya da Tanışmamak

İnanması zor gelse de bazı somut durumların soyutlanmış halini anlamak daha kolay oluyor. Kimin tanışıp kimin tanışmadığı derken parti hakkında kafalar biraz karıştı. Bu parti meselesini çizge ile modelleyince aslında





Örneğin bu rasgele çizilmiş çizgemizde sadece B, D, C kişileri karşılıklı birbirlerini tanıyorlar. Yani sadece bir adet üçgen bulabiliyoruz.

Ramsey'in ne demek istediğini daha iyi anlayabiliriz. Burada ufak bir hile yapıp daha önce (ilk sayımızda) çizdiğimiz modellerden farklı bir çizge çizeceğiz: 6 kişi için 6 köşe noktamız olsun ve kişilerin birbiri ile olan ilişkileri için de çizgileri kullanalım. Diğerlerinden farklı durum şu ki, iki kişi arasındaki ilişki (yani iki köşe arasındaki kenar çizgisi) karşımıza iki şekilde çıkıyor: tanışmak ya da tanışmamak. Bu problemin üstesinden ufak bir hileyle gelebiliriz. Tanışık olan kişileri kırmızı tanışık olmayanları da mavi çizgi ile birleştirelim ve adı geçen problemi soyut bir dille tekrar yazalım!

Üç kişinin birbirini karşılıklı olarak tanıması ya da tanımaması demek oluşturduğumuz şeklin içinde 3 kenarı da tamamen mavi veya kırmızı bir *üçgen* bulabilip bulamayacağımızı sorgulamamızdan başka bir şey değil! Yani 6 köşesi olan bir tam çizge iki renkle rasgele boyandığında, içerisinde her kenarı aynı renkte olan en az bir üçgen bulunabilir mi? Problem, böyle bir görüntüye büründüğü zaman da oldukça zarif ve etkileyici değil mi?

Ramsey Sayılar

Ramsey kuramı bu örnekle sınırlı değil elbette. Örneğin içinde 5 kişinin birbirini karşıklı tanıdığı ya da 12 kişinin tanımadığı bir partiyi garanti etmek için kaç davetli gerekir sorusu da bu kuramın kapsamı içinde yeralıyor. Kısacası herhangi iki değişken için adı geçen özellikleri sağlayan bir sayı bulunabiliyor. İşte böyle sayılara Ramsey sayıları diyoruz. Bu kavramı daha resmi bir şekilde ifade etmek için çizge kuramının birkaç tanımına daha göz atmak gerekli.

Tanımlar

Eğer bir çizgenin bütün köşe noktaları birbiri ile yalnız ve ancak bir bağ yapıyorsa bunlara tam çizgeler diyoruz ve köşe noktası sayısına göre adlandırıyoruz. Örneğin K_n, n köşesi olan tam çizgenin gösterimi için kullanılıyor. Parti problemi için çizdiğimiz çizge de bir 'tam çizge' ve 6 kişiye 6 köşe noktası kullandığımızdan K_6 ile gösteriliyor. Benzer şekilde K_3 çizgesinin bir üçgen belirttiği de açıkça görülebilir. Bu tanımlara göre 6 kenarlı ve iki renkli bir düzenli tam çizge çizilirse iki renkten birinde mutlaka bir K_3 (üçgen) bulunur. Bu bir Ramsey sayısıdır ve gösterimi R(3,3)=6 ile yapılır. Özetle herhangi pozitif sayı ikilisi (k,m) için Öyle bir Ramsey sayısı R(k,m) vardır ki bu sayının tam çizgesi iki renkle renklendirildiğinde, çizge K_k veya K_m 'den birini mutlaka alt çizge olarak içerir.

R(n,m)	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6
3	3	6	9	14	18
4	4	9	18	25	
5	5	14	25		
6	6	18			

Küçük Ramsey Sayıları

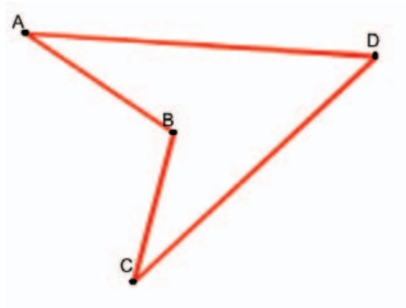
Genel Bir Formül Aranıyor

Ramsey sayılarına matematikçiler henüz bir formül bulamamıştır. Asallar, formülü en uzun süredir aranan sayılar olma özelliğini kaptıracak gibi gözükmese de Ramsey Sayıları da matematikçileri uğraştıracağa benziyor. Özellikle çok büyük sayılar için Ramsey Sayılarını bulmak bir hayli zor! Ama bu demek değil ki onları bulabilmek için elde hiç bilgi yok. Ramsey sayıları için alt ve üst sınırlar gittikçe daraltılmaktadır ve Ramsey'in teoreminde verdiği temel bilgi şöyledir:

Eğer $m,n \geq 3$ ise $R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1)$ eşitliği daima sağlanır.

Mutlu Son

Mutlu sonlar için illaki bir matematik probleminin çözüme kavuşmasına gerek yok. Bazen çözümsüz problemler de mutlu sonla bitebiliyor. Elinize birkaç ufak taş alın ve yere atın. Kural gereği herhangi üçünün doğrusal olmadığını düşünelim. Yerdeki rastgele dizili taşların bir dışbükey dörtgen oluşturması için an az kaç taş atmak yeterlidir dersiniz? Dikkatli olun 4 taş yeterli değil! Örneğin taş dizilimi şöyle gelirse dışbükey bir dörtgen oluşturmak imkansız.



Peki ya 5 taş yeterli olur mu? Bunun cevabının evet olduğunu basit bir yolla görebilirsiniz. Matematikçiler bu problemi genelleştirip bir çözüm aramışlar. Düzlemde 3'ü doğrusal olmayan kaç nokta dışbükey bir n-gen çizilebileceğini garanti eder? Bu konuda yapılan çalışmalar bir dışbükey yedigen için 128, sekizgen için 464, dokuzgen için de 1718 noktaya ihtiyaç duyulduğunu gösteriyor. Genel hali için hala bir formül bulunamamış olan bu problemin çözümü için tanışıp, birlikte çalışan iki matematikçi E. Klein and G. Szekeres evlenmiş ve mutlu yaşamışlar... İşte bu nedenle bu problemin adı mutlu son problemi olarak kalmış.

Matematiğin her kuramı hakkında geniş bilgi sahibi olmayabilirsiniz, bu çok büyük kayıp sayılmaz. Ama siz siz olun temel matematiği hele ki iki rasyonel sayının büyüklüğünü karşılaştırmayı mutlaka bilin. Yoksa kullandığınız araç bir köprünün altına takılıp kalınca 'ben nerede yanlış yaptım' diye kendinizi sorgular durursunuz. Kısaca matematik bilmek gerçekten gereklidir eğer can ve mal güvenliğinizi korumak istiyorsanız.

Nilüfer Karadağ

Bir Buluşum Var

Pisagor Üçlüleri Arasında Bir İlişki

Ben Celal Bayar Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü 1. sınıf öğrencisiyim. Bazı pisagor üçlüleri arasındaki ilişkiyi tablo haline getirdim. Bu konudaki çalışmamı değerlendirmenizi ve "Bir Buluşum Var" adlı köşenizde yer vermenizi arz ederim.

Berkan Zerafet

a	b	$c(\sqrt{a^2+b^2})$
1	0	1
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
17	144	145

- 1. ve 2. satırda a kolonunda 1 ile 3'ün toplamı **4**'e eşittir. b kolonunda 4 ile 0 arasında ve c kolonunda 5 ile 1 arasında **4** fark vardır.
- 2. ve 3. satırda a kolonunda 3 ile 5'in toplamı **8**'e eşittir. b kolonunda 12 ile 4 arasında ve c kolonunda 13 ile 5 arasında **8** fark vardır..
- Aynı şekilde 3. ve 4. satırlarda 5 ile 7 nin toplamı, b kolonunda 24 ile 12'nin ve 25 ile 13'ün farkı 12 etmektedir...

Berkan arkadaşımızın çalışması soyadı gibi oldukça zarif. Ve hatta bu buluşu yapan ilk kendisi olsaydı bu tabloya 'Zerafet Tablosu' adı verilmesi kaçınılmaz olacaktı. Pisagor teoremi öğrenim hayatımız süresince matematik ve geometri derslerinin adı oldukça sık geçen bir formülüdür. Bu formüle uygun doğal sayılarla çalışmak da ayrı bir zevktir zira köklü sayılar insanlara genellikle tam sayılar kadar sevimli gelmez. 3,4,5-6,8,10 ya da 5,12,13 dik üçgenleri geometri sorularının favorileri arasındadır. Bu tarz tam sayı üçlülerin nasıl oluşturulacağına dair bir başlık müfredatımızda geçmiyor. Durum böyle olunca da kimi meraklı arkadaşlarımız adı geçen formülü kendileri arayıp buluyor.

İçinde yaşadığımız dönemde temel bilgilerle temel matematiğe ait bir buluş yapmak çok zor. Pek çok bilgili ve dikkatli gözün güçlü bakışlarına maruz kalan konular mevcut matematikle çözümelenebilecek bir problem ya da formül içeriyorsa bu durum hemen kolayca açığa çıkıyor. Ama bu demek değilki mateamtikte herşey bulunmuş, keşfedecek bir şey kalmamış. $a^2+b^2=c^2$ eşitliğini sağlayan 0'dan büyük a,b,c *tam sayılarına* pisagor üçlüleri denir. Tanım pozitif olma koşulu gerektirdiği için 1,0,1 pisagor üçlüsü kapsamında kabul edilmemektedir; bu nedenle en küçük pisagor üçlüsü 3,4,5'dir. Bu üçlü sayı gruplarının oluşturulma yöntemini açığa kavuşturduktan sonra okuyucumuzun kaydettiği bulguyu da kolayca açıklayabiliriz.

Matematiği zarif ve şık yönlerinden birisi şüphesiz sonsuz elemanlı bir kümeyi birkaç sembol kullanarak hiçbir elemanı atlamadan ifade etme olanağı vermesidir. Örneğin sonsuz elemanlı çift sayılar kümesi $\{2n \mid n \in Z\}$ şeklinde rahatlıkla ifade edilebilir. Adeti sonsuz tane olan pisagor üçlülerini de üretecek sistematik bir yol bulabilirsek onlar da bir satırı geçmeyen bir küme şeklinde gösterebiliriz. Çift sayılar kümesi tek bir değişkenle oluşturulabildiğinden dolayı kolay bir örnek. Pisagor üçlüleri için 2 değişkene ihtiyacımız var:

m ve n sayıları $n \succ m \succ 0$ ifadesini sağlayan tamsayılar olsun. Bu sayıları kullanarak bir pisagor üçlüsü kuralım.

$$a = n^2 - m^2 \qquad b = 2mn \qquad c = n^2 + m^2$$

Oluşturduğumuz bu üçlü bir pisagor üçlüsü çünkü hepsi pozitif tamsayı ve pisagor teoremini sağlıyor:

$$\begin{array}{ccl} (n^2-m^2)^2 & +(2mn)^2 & = n^4 - 2n^2m^2 + m^4 + 4m^2n^2 \\ \Downarrow & \Downarrow & = n^4 + 2n^2m^2 + m^4 \\ a & b & = (n^2+m^2)^2 \\ & & \qquad \Downarrow \\ & & \qquad c \end{array}$$

Bu yöntemle sonsuz tane pisagor üçlüsü üretebileceğimiz açık. Sadece n ve m tanımına uygun iki sayı seçmemiz yeterli. n=2 ve m=1 için a=3;b=4;c=5 çıkıyor. Peki bu yolla bütün pisagor üçlülerini oluşturmak mümkün mü? Biraz cebir biraz geometri kullanarak yapılabilen bir ispatla bu sorunun cevabının 'evet' olduğu görülebilir.

Şimdi tablomuzu Berkan Arkadaşımızın sıralamasına uygun m ve n leri seçerek tekrar oluşturalım:

m	n	$a=n^2-m^2$	$b=2mn$	$c=n^2+m^2$
1	2	3	4	5
2	3	5	12	13
3	4	7	24	25
4	5	9	40	41

Görülen o ki arasında 1 fark olan m ve n'ler seçince tablomuz böyle çıkıyor. n sayısının bir sonraki satırda m rolünü üstlenmesinden faydalanarak ardışık iki satırı şöyle yazabiliriz:

x	y	y^2-x^2	$2xy$	y^2+x^2
y	z	z^2-y^2	$2yz$	z^2+y^2
		Toplam: z^2-x^2	$\Leftrightarrow$	Fark: z^2-x^2

Okuyucumuzun önerdiği toplama ve çıkarma işlemlerinde her zaman aynı değişken sadeleştiği için birbirine eşit sayılar elde edilmiş oluyor ve bu da durumun bir kısmını açıklıyor. Ortadaki sütun için daha farklı bir özellikten yararlanalım. Bu sütunda oldukça dikkat çekici bir özellik var. b sütunu daima c sütunundaki sayıdan 1 eksik! Bu nedenle c ile b'deki ardışık satırlardaki sayıların aradasındaki farklar birbiriyle aynı oluyor. Bu, arasındaki fark 1 olan sayılarla türetilmiş pisagor üçlülerinin diğer bir genel bir özelliğidir. ($m - n = 1$). Ayrıca 4, 12, 24, 40, 60 dizisiyle ilerleyen b sütunundaki sayılar arasındaki farkın 8, 12, 16, 20 şeklinde düzenli olarak büyümesi de göze çarpan diğer bir husus.

Matematikte pek çok ilginç ilişkiler gözlemlerle ortaya çıkar. Bu nedenle gözlem yeteneği matematiksel zekanın önemli bir parçasıdır. Açıkça görülüyor ki Berkan arkadaşımız bu yeteneğe sahip...Gözlemini bizlerle paylaştığı için kendisine teşekkür ediyor, bundan sonraki çalışmalarında okul hayatında başarılar diliyoruz.

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz:

TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,
Buluşumu Değerlendirin Köşesi,
Atatürk Bulvarı No:221
Kavaklıdere-ANKARA