

Serüvene Devam

Pi ile Bir Gezinti

Geçen sayıda π ile bir gezintiyeye çıkmış ve ünlü Fransız matematikçi François Viète ile de kısa bir mola vermiştik. Gelin isterseniz, kaldığımız yerden serüvenimize devam edelim, ama öncelikle son olarak ele aldığımız Viète'nin o ilginç eşitliğini bir kez daha hatırlayalım:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$

(?) ... Ve işte kanıtı.

Önce birim yarıçapa sahip bir daireyi ele alalım. Bu durumda $\theta=45^\circ$ iken, $\sec\theta$ kırımlar karesinin bir kenarını verecektir. Aynı şekilde, düzgün kırımlar sekizgeninin iki kenar toplamı da $\sec\theta \cdot \sec(\theta/2)$; düzgün kırımlar onaltıgeninin dört kenar toplamı da $\sec\theta \cdot \sec(\theta/2) \cdot \sec(\theta/4)$ verecek ve böyle devam edecektir. Böylelikle

$\sec\theta \cdot \sec(\theta/2) \cdot \sec(\theta/4) \dots \rightarrow \pi/2$ olacak, yani çeyrek dairenin uzunluğuna yakınsayacaktır. Dolayısıyla $2/\pi = \cos\theta \cdot \cos(\theta/2) \cdot \cos(\theta/4) \dots$ elde edilecektir.

Şimdi de $\cos\theta = \sqrt{2}/2$ ile

$$\cos(\theta/2) = [(1 + \cos\theta)/2]^{1/2}$$

$$\cos(\theta/4) = [(1 + \cos(\theta/2))/2]^{1/2}$$

ve devam eden eşitlikleri kullanırsak, söz konusu çarpıma ulaşacağımız açıktır. (Not: Bu eşitliği geçen sayıda kanıtladığımız ve Arşimet'in de kullandığı düzgün kırımlar çokgenlerinin kenar uzunluklarına dair formülde yararlanarak çözeniz de mümkün!)

Bu gelişmelerden 6 yıl sonra, yani 1585'te ise, Adriaen Anthoniszoon eski Çin oranı 355/113'ü yeniden keşfetti. Görünen o ki, bu oldukça şanslı bir rastlantıydı; çünkü gösterilen tek şey

$$\frac{377}{113} > \pi > \frac{333}{106}$$

eşitsizliği olmuştur. Daha sonra pay ve paydaların ayrı ayrı ortalaması alınarak bu kesin değer ortaya atılmıştı. 1593'te adanmış bir matematikçi Hollandalı Adriaen Van Roomen, π yi 15 ondalık basamağına kadar doğru buldu ve de klasik metodu uygularken 2^{30} kenarlı çokgenler kullandı. 1610 yılında yine bir Hollandalı, Ludolph van Ceulen, π nin 35 ondalık basamağını 2^{62} kenarlı çokgenleri klasik metotta kullanarak elde etti. Bu iş için hayatının büyük bir kısmını harcadığı ve başansı oldukça olağandışı

görüldüğünden (ki 2^{62} kenarla oturup hesap yapmak hiç kolay iş değil), dul eşi şimdi kayıp olan mezar taşına bu sayıyı yazdırmıştı. Bu nedenle günümüzde bu sayıya "Ludophine sayısı" olarak da rastlanmaktadır. 1621'de karşımıza yine bir Hollandalı bilim adamı çıkmaktaydı: Willebrord Snell. Snell, π yi hesaplamak için klasik bir metodu trigonometrik olarak geliştirmiş ve bu sayede π için daha yakın sınır değerleri saptaması mümkün olmuştur. Bu metodu van Ceulen'in ömrünü verdiği π nin 35 ondalık basamağını yalnızca 2^{30} kenarlı çokgenlerle elde edebilmişti. Oysa klasik metod bu kenar sayısıyla ancak 15 ondalık basamağı vermekle yetiydi. Diyebiliriz ki, Snell bu yeni açılım sayesinde pek çok matematikçinin ömrünü de uzatmış oluyordu. Bu arada ancak 1654 yılında Snell'in bu açılımının doğru ispatı getirilebilmişti. O da yine bir Hollandalı'dan; matematikçi ve fizikçi Christaan Huygens'den. Son olarak Grienberger'in Snell'in bu yeni açılımını kullanarak elde ettiği 32 ondalık basamakla (1630) hem çevre uzunlukları kullanılarak π hesaplamaları yapılmış hem de π üzerinde uzun müddet devam eden Hollandalı matematikçi egemenliği son buluyordu.

Artık 17. yüzyılın sonlanıyordu ve İngiliz matematikçi John Wallis (1650) ilginç bir ifade bulmuştu:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}$$

Ne yazık ki bu ifade π nin daha geniş hesaplamalarında hiçbir katkıda bulunmamıştı. Ancak ardından (1671) İskoç matematikçi James Gregory

serisini elde etti. Böylece Gregory tarafından not düşülmüşse de $x=1$ için şu seri elde ediliyordu:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

..Ve ardsıra 1699'da Abraham Sharp

$x = \sqrt{1/3}$ ü Gregory'nin serisine koyarak π nin 71 ondalık basamağını bulurken John Machin de aynı seriyi $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$ eşitliği ile birlikte kullanarak 100 ondalık basamağına ulaşıyordu. 1719 yılında Fransız De Lagny x için Sharp'la aynı değeri kullanıp 112 ondalık basamağı elde etti.

(?) Lindemann'in kullandığı yukarıdaki eşitliğin ispatı da artık sizden.



F. Lindemann, 1882 yılında, π nin üstünlüğünü (transandant olduğunu) matematik camiasına duyurdu.

(İpucu: $\tan(4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)) = 1$ ifadesini elbette bir tanjant açılımı ile birlikte kullanmanız yeterli olacaktır.)

İyi güzel de tüm bu ifadeler için de kullandığımız π sembolü ne zaman ortaya çıkmıştı? Bu sembol aslında önceki dönemlerde İngiliz matematikçileri William Oughtred, Isaac Barrow ve David Gregory tarafından dairenin çevresini temsil etmek için kullanılıyordu. π yi çevrenin çapa oranı olarak ilk kullanansa, 1706'da basılmış bir yayınıyla, İngiliz yazar William Jones idi. Ancak sembol bu haliyle fazla kabul edilmemiş, üstad Euler 1737'de bir bakıma bu sembole sahiplenerek belirsizliğe son vermişti.

Peki, bu π nasıl bir sayıydı? Eli yüzü düzgün müydü? Şaka bir yana; π nin rasyonel olup olmadığı, yani a ve b tamsayı olmak üzere a/b olarak yazılıp yazılamayacağı hep merak konusu olmuştur. Bu yüzden matematikçiler π nin ondalık basamaklarıyla uğraşmışlar, bir yerlerde basamakların önceki değerlerini tekrar etmesini beklemişlerdi. Böylelikle π devirli bir ondalık sayı halinde yazılabilir ve rasyonel olduğu söylenebilirdi. Ancak bir türlü o tekrar eden basamaklar gün ışığına kavuşmadı ve sonunda (1767) Johann Heinrich Lambert tüm bu umutlara son verdi: π nin irrasyonel olduğunu kanıtlamıştı.

1777 yılında π ye çok farklı bir şekilde ulaşmaya çalışıldı. Comte de Buffon ünlü "iğne problemi"ni geliştirmiş; böylelikle olasılık metodlarıyla π için yaklaşık değerler verilebilmeye başlanmıştı. Nasıl mı? Yatay bir düzlem üstünde, birbirinden a kadar uzaklıkta dizilmiş paralel doğrular düşünün ve $l < a$ iken uzunluğu l olmak üzere homojen düzgün bir çubuğun rastgele bu düzlemin üstüne düşürüldüğünü varsayın. İşte Buffon'un gösterdiği bu çubuğun düzlemdeki doğrulardan birinin üstüne düşme olasılığını, $p=2l/\pi a$ ifadesinin

verdiğiydi. Bu deneyi oldukça fazla sayıda tekrarlayıp başanlı durumları not alarak yukarıdaki formülle π ye yaklaşık bir değer elde etmek elbette mümkündü. Bu yolla elde edilen en iyi sonuç ise 1901'de İtalyan Lazzerini'den geldi. Topu topu 3408 kez çubuğu atmak suretiyle π nin 6 ondalık basamağına ulaşabilmişti! Emin olun, onun bu sonucu bu yolu deneyenlerin elde ettiklerinden kat kat iyiydi. 1904 yılında da, R. Chartres bilinen bir gerçeğin uygulamasını ortaya koydu; rasgele yazılan iki pozitif tamsayının aralarında asal olma olasılığı $6/\pi^2$ idi.

Yıl 1794 ve Adrien-Marie Legendre π^2 nin irrasyonelliğini gösteriyordu.

1841'de İngiltere'den William Rutherford, daha sonra ancak 152'sinin doğru olduğu tespit edilen, π nin 208 ondalık basamağına ulaştı. Bunun için de Gregory'nin serisini şu eşitlikle birlikte kullandı:

$$\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/70) + \arctan(1/99)$$

1844 yılında, doğal bir hesap makinesi olan Zacharias Dase π nin 200 ondalık basamağını doğru olarak elde etti. Ancak onun yetenekleri bununla sınırlı değildi. 8 basamaklı iki sayıyı 55 saniyede, 20 basamaklı olanları iki dakikada, 40 basamaklıları kırk dakikada ve 100 basamaklıları da 2 saat 45 dakikada çarpabiliyordu. Yine 52 dakikada aklıyla 100 basamaklı bir sayının karekökünü hesaplayabiliyordu. Hatta 7 000 000 ile 10 000 000 arasındaki sayıların çarpım tablosunu dahi oluşturmuştu. Ancak Dase genç bir yaşta, 37'sinde ölmüştü. Kimbilir belki daha uzun bir ömür, insanlığın bilgisayarlarla tanışmasını geciktirebilirdi(!).

Artık π nin basamaklarını hesaplamak bir yarış haline gelmişti. Önce Rutherford (1853) probleme geri dönüş yaptı ve 400 ondalık basamağı doğru olarak elde etti. Ardından yine bir İngiliz William Shanks (1873), Machin'in formülüyle uzun süren bir rekoru eline geçirdi: Tam 707 ondalık basamağı hesaplamıştı.

1882'de ise π nin üstünlüğü tes-eil edildi. Tabii, bu π nin matematiksel anlamda üstün (aynı zamanda "aşkın" ya da "transandant" sayı olarak da geçer) bir sayı olduğu anlamına geliyordu. Peki, bunun manası ne dersiniz şuydu: Bir sayı rasyonel katsayılarla sahip herhangi bir polinomun köküne ona cebirsel denilir, eğer değilse, işte o zaman üstün sayı olarak adlandırılır. Bunu gösteren ise F. Lindemann olmuştur.

Artık π de yeni bir yüzyıla adım atıyor ve 20. yüzyılın başdöndürücü buluşlarına o da bizzat şahit olmak fırsatını buluyordu. 1946 yılında İngiltere'den D.F. Ferguson Shanks'in

π için verdiği değer 528. basamak-
tan başlayan hatalar buldu ve Ocak
1947'de 710 basamaklı düzeltilmiş
bir değeri açıkladı. Aynı ay Amerikalı
J. W. Wrench, Jr. 808 basamaklı bir π
değeri yayınladı; ancak yine Fergu-
son daha sonra 723. basamakta bir ha-
ta buldu. 1948 Ocak ayıyla beraber,
Ferguson ve Wrench birlikte 808 ba-
samağa kadar düzeltilip kontrol edil-
miş π değerini yayınladılar. Wrench
Machin'in formülünü kullanırken,
Ferguson

$$\pi = 4 \cdot \arctan(1/4) + \arctan(1/20) + \arctan(1/1985)$$

formülünü kullanmayı tercih etmişti.
1949 yılında π bilgisayarla tanı-
tı. Aberdeen, Maryland'deki Ordu
Balistik Araştırma Laboratuvarları'nda
bulunan elektronik bilgisayar ENIAC
ile π nin 2037 ondalık basamağı hes-
aplandı. Ardından arka arkaya çeşitli
bilgisayarlarla π nin daha fazla onda-
lık basamağı gün ışığına çıkarıldı.
François Genyus, Wrench ile Daniel
Shanks, M. Jean Guilloud gibi bilim
adamları ayrı ayrı bu çalışmalarda yer
aldılar ve 1973'te (Guilloud ve ekibi)
 π yi 1 000 000'uncü ondalık basama-
ğa ulaştırdılar.

1981 yılında π nin üzerinde bu
defa uzakdoğu rüzgarları esiyordu.
Tsukuba Üniversitesi'nden iki Japon
matematikçi Kazunori Miyoshi ve
Kazuhiko Nakayama FACOM M-200
bilgisayarı ile 137,30 saatte π nin
2 000 038 hanesini hesapladılar. Bu
esnada

$$\pi = 32 \arctan(1/10) - 4 \arctan(1/239) - 16 \arctan(1/515)$$

formülünü kullanırken, Machin'in
formülüyle kontrol etmeyi de ihmal
etmemişlerdi. (Ne de olsa, birinin çı-
kıp "1 398 271. basamakta hatanız
var!" demesini istemezlerdi).

Ocak 1986'da Kaliforniya'da bu-
lunan NASA Ames Araştırma Merke-
zi'nden D. H. Bailey 28 saat boyunca
bir Cray-2 süper bilgisayarını çalıştı-
rarak 29 360 000 basamağı elde etti.
Bu hesaplamayı Dalhousie Üniversi-
tesi'nden J. M. ve P. D. Borwein'in
algoritmasına dayanarak yapmıştı. Kı-
sa bir süre sonra da Tokyo Üniversi-
tesi'nden Yasumasa Kanada bir NEC
SX-2 süper bilgisayarını yine Borwein-
lar'ın algoritmasıyla kullanarak, π

nin 134 217 700 basamağını elde et-
ti. Son olarak Yasumasa Kanada'nın
rekor kıran hesaplaması, yani π nin
6 442 450 000 basamağı 1995 yılında
elde edildi.

Elbette, π için süren bu yarış de-
vam edecek. Hem ondalık basamak-
ları hesaplanacak hem de gizemli sa-
yının özellikleri ortaya çıkarılmaya
çalışılacak. Roma'nın doğuşunu ve
batışını, istilaları, Fransız Devrimi'ni
ve Soğuk Savaşı gören bu sayı, kim-
bilir daha kaç tarih sayfasında kendi-
ne yer açmayı becerecek. Bekleyip
göreceğiz.

Büyük Salgın

Evet, doğru okudunuz. Bu salgın
adı morbus cyclometricus. Gerçi
tedavisi bir asır önce Lindemann'dan
geldi, ancak halen yan etkilerine rast-
lanıyor. "Nereden nereye?" deme-
yin. Çünkü bu hastalığın da sorumlu-
su, artık yakından tanıdığımız π . Has-
talığın en önemli belirtisi, alanı bir
daireninkine eşit olan kare çizme iste-
ği... Belki de bu hastalık, daha doğ-
rusu bu problem, yeryüzünde böylesi
çok ve uzun ilgiyi görmüş tek prob-
lem. M.Ö. 1800'lere dek uzanıyor ta-
rihçesi. Önce problemi Mısırlılar
"çözmüş". Karenin kenarını dairenin
çapının 8/9'una eşit olarak üç haller-
mişler. Daha sonra eski Yunanlılar ele
almış olayı. Anaxagoras, Sakızlı Hi-
pokrat, Hippas, Dinostrotus ve Aris-
met bu soru uğrunda ter dökmüşler.
Ardından da bu soruyu çözdüğünü
iddia eden bir kişi olmaksızın tek yıl
geçmemiş. Zaten bundan ötürü
1755'de, Fransız Bilimler Akademisi
bir daha daireyi kare yapma sorusun-
un çözümlerini incelemeyeceğini
açıklamış.

İşte bu soruyu "çözenlerden" biri
de, Sieur Mathulon. Bir amatör ol-
makla beraber, o da bu sorunun bü-
yüsüne kapılmış ve 18. yüzyılda soru-
yu çözdüğünü ilan etmiş. Hatta ken-
disine öyle çok güveniyormuş ki, çö-
zümünün yanlış olduğunu ispatlaya-
na 1000 ecu (5 Frank değerinde
gümüş Fransız parasıdır.) ödeyeceği-
ni taahhüt etmiş ve bu parayı mahke-

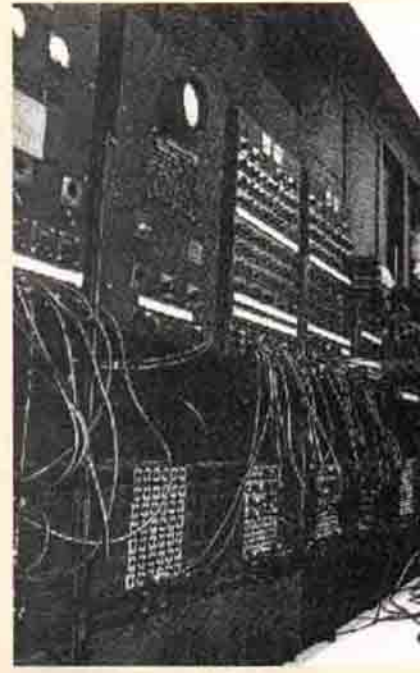
me önünde de ödemek zorunda kal-
mış. Anlayacağınız, bu soru matema-
tikçilerin yalnız zihinlerini değil ke-
selerini de yoklamış.

Ancak 1882'de tüm umutlar Felix
Klein'in öğrencisi Lindemann tara-
fından toprağa gömülmüş. Bu ismi
önceki satırlardan hatırlamanız müm-
kün. Zaten daha önce yazdığımız;
bulmuş olduğu özellik bu sorunun
yanıtı olmuş. Fakat isterseniz, Linde-
mann'ın bu problem üstündeki rolü-
nü anlamak için şu basit gerçeklere
başvuralım: 1 birim uzunluktaki bir
doğru parçası üstünde cetvel-pergel
yardımıyla yapılan ölçümler yalnızca
sonlu sayıda aritmetik işlemin (+, -, .,
÷) ve karekökün ($\sqrt{\quad}$) uygulanmasıyla
yeni uzunluklar ve kare alanları oluş-
turabilir. Bu şekilde elde edilebilen
sayıları aynı zamanda birer "cebirsel
sayı" olduğunu söylemek de doğru
olur. İşte daha önce de bahsettiğimiz
gibi, Lindemann'ın π sayısının üstün
olduğunu göstermiş olması; soru-
zun çözümünü olanaksız kılmıştır.

π için Değer Bıçenler

Yazımıza son verirken π nin uğra-
dığı akıbetlerden de bahsetmeden
geçmek istemedik. İlk örneğimiz,
A.B.D. Indiana Eyaleti'nden? Olay,
bir tıp doktoru olan Edwin Good-
win'in π için yeni bir değer bulup,
bunu yasalaştırmak istemesiyle başlı-
yor. Hatta öyle iyi niyetli davranıyor
ki, telif hakkını alacağı bu yeni değer
için Indiana eyaletinden hiçbir ücret
talep etmeyeceğini tasarısında belir-
tiyor. Yasa tasarısında şu sözcükler
yer alıyor: "... ayrıca 90'''lık giriş
uzunluğunun yay uzunluğuna oranı
7/8'dir. Öte yandan karenin köşegeni-
nin kenarına oranı 10/7'dir ki, bu şu
önemli dördüncü gerçeği ortaya koy-
maktadır: Dairenin çapının çevresine
oranı 5/4'lün 4'e oranıdır..."
(?) İşte bu satırlarda bir çelişki ortaya
çıkıyor. Son olarak bunu bulmakta yi-
ne size düşüyor.
(İpucu: Hareket noktamız, π nin de-
ğeri olsun.)

246 no lu tasarı, Bataklik Arazı
Komisyonu, Eğitim Komisyonu gibi



20. yüzyılın başdöndürücü hızyı π
de ENIAC ile Maryland'de tanıştı.

çok ilgili komisyonlarca görüşüldük-
ten sonra 1897'de 67 oya karşılık 0
oyla Temsilciler Meclisi'nde kabul
ediliyor. Ardından Senato'ya ulaşan
tasarı, Senato tarafından yine çok il-
gili ve bilgili (!) bir komisyon olan
Alkollü İçkilerle Mücadele Komis-
yonu'na havale ediliyor. Ancak
tasarının gazete sütunlarına yansıtıl-
dan sonra tepkilere uğraması rafa kal-
dırılmasına sebep oluyor.

1892 yılında ise New York
Tribune gazetesinde bir yazar tarafın-
dan uzun yıllar bilinmeyen gizli bir
keşfin duyurusu yapılıyor, π nin tam
olarak 3,2 değerine eşit olduğunu...
Daha sonra bu yeni değer, pek çok
taaraftar toplamayı başarıyor. Tekrar
1931'de bu yazının yayınlanmasıyla
beraber, Amerika'daki pek çok fakül-
te ve halk kütüphanesi yardımsever
yazar tarafından gönderilip

$$\pi = 3 - \frac{13}{81}$$

eşitliğini gösteren kalın kitaplar
alıyor.

İşte kendisine bıçılan tüm bu
değerlere karşın π , halen gizemini
koruyarak yeni matematikçilerin
kapsını aralamasını bekliyor. Tabii,
sizin de..

Han Nazmi Özsoylev
Bilkent Matematik Topluluğu

Çözmece

1.

$$\pi = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \cot^{-1} 2n^2$$

olduğunu gösterin.

2. Bir dairenin n adet düzgün doğ-
ruyla bölünmesi sonucunda elde
edilecek maksimum bölge sayısı
kaçtır?

Geçen Ayın Çözümleri

1. $S' = \{\arctan x \mid x \in S\}$ olsun. O
zaman

$$S' \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

olur ve S' 9 elemanlı bir küme ol-
duğundan, farklı $\pi/8$ den az olan
 $\alpha_0 = \arctan a_0$ ve $\beta_0 = \arctan b_0$ gibi

en az iki elemanı vardır.

$0 < \alpha_0 - \beta_0 < \pi/8$ olduğunu varsaya-
lım. O zaman

$$\frac{a_0 - b_0}{1 + a_0 b_0} = \frac{\tan \alpha_0 - \tan \beta_0}{1 + \tan \alpha_0 \tan \beta_0} = \tan(\alpha_0 - \beta_0)$$

ve

$$0 < \tan(\alpha_0 - \beta_0) = \frac{a_0 - b_0}{1 + a_0 b_0} < \tan \pi/8 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

olur.

2.

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{x-1} \quad (1)$$

eşitliğimizde, $x \neq 0,1$ olsun. O
zaman $(x-1)/x \neq 0,1$ olur ve eğer
(1)'de x yerine $(x-1)/x$ koyarsak

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = 1 - x \quad (2)$$

elde ederiz.

(2)'den (1)'i çıkarmamız bize

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{1-x}\right) = -x - \frac{1}{x-1} \quad (3)$$

verecektir. Şimdi (3)'te x yerine $(x-1)/x$ koyarsak bu bize

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) - f(x) = -\frac{x-1}{x} + x \quad (4)$$

verecektir.

(4)'ten (1)'i çıkarırsak da

$$2f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} - x \quad (5)$$

elde ederiz.

Tersine, eğer f (5) ile tanımlanırsa,
o zaman (1)'in de sağlandığı yine
kolaylıkla elde edilebilir.