

Matematikte Problem Çözme Deneyim ve Uslamlama

Matematik eğitiminin başlıca amacı kişiyi, aritmetik, cebir ve geometrinin temel bilgileriyle donatmanın yanı sıra, düşünmeye yönlendirmek; uslamaların, ulaştığı sonuçlarda tutarlı olma duyarlılığına ulaştırmaktır. Matematik bilgisiyse matematiksel düşünmeyi karıştırmamak gerekir. Bilgi, düşünmek için gerekli ama yeterli değildir. Okullarımızda sürüp gelen öğretim hemen tümüyle bilgiyi ön planda tutmakta, düşünme alışkanlığını kurma etkinliğinden uzak kalmaktadır. Sonuç, hep bildiğimiz gibi, çocukların kafalarını yaşam etkinliklerinde belki de hiç kullanamayacakları, dahası bir süre sonra unuttukları bilgilerle doldurmaktan çoğu kez ileri geçmemektedir. Yerleşik olan bu tutumu düzeltmenin temel koşulu matematiksel düşünme sürecinin yapısını tanıtmaktır.

Özünde bir problem çözme etkinliği olan düşünme karmaşık bir olaydır; değişik bağlamlarda farklı biçimler sergiler. Örneğin, sanatta imgelem, tarihte anımsama, bilimde açıklama, matematikte ispatlama ya da daha geniş deyişle sonuç çıkarma ağırlık taşıyan düşünme biçimleridir.

Özellikle matematikte belirginlik kazanan "sonuç çıkarma" dediğimiz düşünme nasıl bir süreçtir. Bir sorun ya da problemle karşılaştığımızda nasıl davranıyoruz, sonuç nasıl ulaşıyoruz? Bu soruya yanıt ararken, çözümü yoğun düşünme gerektiren bir iki örneğe bakmada yarar vardır.

Problem 1: Sekiz litrelik bir fiçidaki şarap iki kişi arasında eşit bölüştürülecektir. Elimizde biri beş, diğeri üç litrelik iki boş kap vardır. Eşit bölüme nasıl sağlanabilir?

Böyle bir durumda, davranışları, düşünmeden çok pratik alışkanlıklara yatkın kişi doğrudan sinamayılıma yoluna gider; şarabı bir kaptan öbürüne boşaltarak sonuç almaya çalışır. Bir tür "el yordamı" olan bu yöntem rastlantı ya da şansla aranan sonucu verebilir kuşkusuz; ama çoğu kez uzun bir bocalama ve zaman kaybı pahasına! Oysa az çok düşünme alışkanlığı kazanmış bir kişinin, yaklaşımı öyle zaman ve emek israfını gerektirmez; kişi, el yordamı yerine "düşünsel deney" diyebileceğimiz bir yöntemle problemini çözmeye çalışır. Bu yöntemle çözüm, verilen bilgileri, bilgiler arasındaki ilişkileri be-

lirleme ve kullanma becerisine dayanır. Nedir verilen bilgiler? Şarap dolu 8 litrelik bir fiçi; beş ve üç litrelik boş kaplar. İstenecek, şarabın iki kişi arasında eşit bölüşümüdür. Bu bilgilerle kişi yine şarabı bir kaptan öbürüne boşaltarak işe koyulur. Ancak bu kez boşaltma işlemi fiziksel değil, düşünseldir; rastgele değil, çözüme elveren ilişkiler kurularak yapılır. Örneğin, boş kaplar arasında 2 litrelik bir farkın olması önemli bir ipucu sağlayabilir. Bir başka ipucu, fiçide 4 litre şarap kalacak şekilde boşaltmanın yapılması gereğinde bulunabilir. Çözüm ipucu veren bu türden bir ya da iki ilişki bizi aranan sonuca götürür. Başka bir örnek alalım.

Problem 2: Boyutları $3 \times 3 \times 3$ cm olan tahtadan, kırmızıya boyanmış bir küp var elimizde. Bu küp, boyutları $1 \times 1 \times 1$ cm olan küçük küplere bölünse, küçük küplerin toplam kaç yüzü boyalı olacaktır?

Burada da işe doğrudan fiziksel deneyle başlanabilir. Örneğin belirlenen boyutta tahtadan küp kesilir, boyanır; sonra, bu küp, kenar uzunluğu 1 cm olan küçük küplere testereyle kesilerek bölünür, boyalı yüzler sayılır. Ya da, daha basit yoldan, küpün boyalı 6 yüzünde 1 cm'lik kareler çizilerek sayılır. Oysa çözüm, bu tür fiziksel hareketlere başvurmaksızın, salt uslamayla da bulunabilir. Bunun için, daha önce de belirttiğimiz gibi, probleme ilişkin bilgileri belirlemek, çözüme ipucu sağlayacak ilişkileri kurmak gerekir. Eldeki bilgilerden biri küçük küplerin sayısı; bir diğeri küçük küplerin tüm yüzlerinin boyalı olmadığıdır. Boyalı yüz sayısının küçük küpün konumuna göre değiştiği çözüme ipucu sağlayan önemli ilişkidir. Köşelerde yer alan küplerin 3, kenarlarda yer alanların 2, yüzey ortasında yer alanların ise yalnızca bir yüzü boyalıdır. Belirlenen bilgiler kişinin ya da daha önceki deneyimlerinde vardır ya da durum üzerindeki yeni gözlemlerle sağlanabilir. Boyalı yüz sayısının konuma göreliği ise, kişinin imgelem ya da zekâ gücüyle bulması gereken ilişkidir.

Verdiğimiz örneklerden de görüldüğü gibi problem çözmede "uslamama" dediğimiz düşünsel etkinlik yeterlidir; yeter ki, bu etkinlik kişide bir deneyim, bir anlaksal alışkanlık niteliği kazanmış olsun. Bu da, kuşkusuz, ilk yıllardan başlayan bilinçli bir eğitim sürecini gerektirir. Çocuğun günlük deneyimlerine dayalı, gerçek anlamda problem çözmeye yönelik matematik öğretimi bu eğitimde hiç kuşkusuz etkili araçların başında gelir.

Matematiksel düşünme, kuralları belli salt dedüktif çıkarımdan ibaret değildir; her aşamada kişinin deneyim, sezgi, yaratıcı imgelem ve zekâ gücünü gerektirir. Bunu, verdiğimiz basit örneklerde olduğu gibi daha karmaşık ya da soyut örneklerle de gösterebiliriz. Örneğin, üçgeni alalım. Geometrinin postulatları üçgenin varlığını mantıksal olarak olanaklı kılmaktadır. Ama bu demek değildir ki, "üçgen" dediğimiz nesne dedüktif çıkarsamanın bir ürünüdür. Üçgen kavramının mantıksal niteliği sonraki aşamalarda ulaşılan bir gelişmedir. Başlangıçta üçgen ve benzer nesneler (örneğin, çokgenler, daire, vb.) insanlığın deneyim ve zekâsının bir ürünü olarak ortaya konmuştur. Çevremizde o tür kavramlara yol açan pek çok nesnel görüntüler vardır. Geometrik şekillerin birçoğu bu görüntülerin anlaşılmış ve daha düzgün imgeleridir. Geometri bu imgelerden kaynaklanan, giderek uslamaya yoluyla mantıksal yetkinliğe ulaşan bir çalışmadır. Matematik eğitimi, her düzeyde, matematiğin gelişme sürecindeki bu özelliği göz önünde tuttuğu ölçüde başarılı olur.

Cemal Yıldırım

Prof. Dr. ODTÜ Emekli Öğretim Üyesi

Bilimi Gönlümüzce Yaşama Çabamızda Feyerabend'in Yeri

Aklî, Yöntem ve Bilim

Nihil est sine ratione. Hiçbir şey sebezis değildir. Batı düşüncesinin köklerinden kaynaklanan bir sav. "Hiçbir şey temelsiz, dayanaksız kavranamaz, akla (ratio) dayandırılmaksızın açıklanamaz" biçiminde de yorumlanabilir.

Bilgimizin de temellerinin, dayanaklarının olması gerekir. Bilgimizin güvenilirliğini sağlayan ölçütlerin belirlenmesi, bu ölçütler yardımıyla hangi bilgi savlarının güvenilir hangilerinin güvenilir olmadığına saptamak için kaçınılmazdır. Güvenilir bilgiye neden gerek duyarız? Doğayla, toplumla kültürel olan ilişkilerimizde karşımıza çıkan sorunların üstesinden gelebilmek, onları anlayıp, açıklayabilmek diye. Bu çabamızda başarılı olabilelim diye. Olagan ki bu yanıt, bilgi elde etme uğraşımızın yalnızca bazı boyutlarını göz önüne alarak veriliyor; insan sıfı bilgisi elde etmek için de bilgi elde etmek isteyebilir; sanatsal, ilâhî bir coşku duyduğu için de. Bu-

rada bilme tutkumuzun, bilgi arayışımızın yüzlerce yıllık serüveninde yaşmaz, yanılmaz ilkelere dayalı, sağlam temellerden kalkma isteğiyle birlikte yürüyüşü dikkatimizi çekmeli. Herşeyin sebebi var, temeli var, bilginin de, bilgi arayışının da. İnsan böyle düşünme eğilimini taşıyor genellikle.

En güvenilir bilgi türü nedir? Fazlaca tartışmaya yer bırakmadan çağımızın yanıtı "bilimsel bilgi" olacaktır. Bilim, özellikle teknoloji aracılığı ile sunduğu olanakların etkisiyle, eğitim düzenimizi baştan aşağı kuşatmasıyla, diğer bilgi türlerine göre üstün bir konumda görünüyor. Bilimsel bilgilerden kuşulanmak, onları sorgulamak kolay bir çaba değil günümüzde. Oysa kendilerine bilim felsefecileri diyen felsefecilerin işi bu: Bilimsel bilgi neden güvenilir? (Temelleri, dayanakları olma ya da böyle temel ve dayanakları arama ile güvenilir olmak arasında yakın bir ilişki olduğunu varsayıyorum.) Bu güvenilirliği neye, nelere dayanarak sağlıyor? Nasıl elde ediliyor böylece bir bilgi, elde edilmesinin kuralları var mıdır? Yöntemi var mıdır? Belli bir mantık taşıyor mu kendi içinde?

En güvenilir bilginin bu güvenilirliğinin sebepleri olsa gerek. Unutmayalım, ne demiştik, *Nihil est sine ratione*. Hiçbir şey sebezis değildir. Akla (ratio) dayanması gerekir. Eğer bilimsel bilginin akla dayalı temellerini bulamazsak, diğer bilgi türlerinin (sezgisel, sanatsal, ahlâksal... bilgiler) dayanağını hiç bulamayız. Neden akla uygundur bilimsel bilgi?

Düşünce tarihinde özellikle son yüzyılda canlanan bu tartışmaların gelişimini ve ulaştığı son noktaları sıralı sayfalarda açıklamak oldukça zor. Kabaca da olsa, bu yazının amaçları açısından bilimsel bilginin akla uygunluğunu, dolayısıyla güvenilirliğini birkaç noktadan açıklamaya olanak vardır. (Bu iki özellik, birbirleriyle örtüşme de çoğunluk birbirlerine çok yakın olarak ele alınmış: Bilimsel bilgiye güven. Neden, Çünkü akla uygun. Peki akla neden güveneyim? Daha başka güveneceğim ne var ki? Aklin ışığını bastırabilecek ışık mı olurmuş? Bir dönemin yanıtı buydu.) 1. Kuramlaşmış bilimsel bilginin bir mantığı vardır. Mantıksal tutarlılık taşıyor bu bilgi. 2. Bilimsel araştırma belli yöntemlerle yürütülür. Bu yöntemde bir mantığı vardır. 3. Kuramlar tarih boyunca değişirler. Aristoteles'ten Newton'a, Newton'dan Einstein'a doğru gelişen kuramların belli mantığı vardır. İşte bu mantıklılık akla uygunluğu, akla uygunluk ise güvenilirliği gösterir.