

ERDÖS ÖDÜLLERİ SİZİ BEKLİYOR!

İyi bir matematikçiyi ölüm bile durduramaz! Başka birçok şey yanında Paul Erdös bunu da kanıtladı. Geçimine katkı sağlamak için bir meslektaştan ötekine, dostlarından yabancılara dolaşan bu dünyanın önde gelen sayı teorisyeni, buna karşılık engin matematik içgörüsünü de önüne çıkanla paylaşmıştı. Sürekli ve delicesine bir çalışmayla geçen altmış yıllık yaşamında, kendisini dünyadaki neredeyse bütün akademik matematikçilerle birleştiren 1500'ün üzerinde makale yayımladı. Erdös'ün 1996 yılındaki ölümü, onun yayım hızını yavaşlatmış olsa da, durdurmadı. Son beş yıl içinde, dergilerde onun adını taşıyan 62 kadar yeni makale yayımlanmış durumda. Üstelik Erdös, arkasında bıraktığı problemlerle matematikçilerin araştırmalarına hâlâ rehberlik etmekte!



Sayı teorisi, mantık, grafik teorisi, geometri, kombinatorik ve daha birçok disiplinden problemler, problemler, problemler... Erdös onları derslerde, sohbetlerde, yazılarında sürekli olarak ortalığa savurdu durdu. Bütün matematikçiler bunların önemi konusunda fikir birliği içinde; ama kimse listelerini tutmuş değil. Dahası, kaç tane oldukları bile bilinmiyor. California Üniversitesi'nde (San Diego) matematikçi ve bil-

gisayar bilimcisi olan, Erdös'ün son yıllarında da işlerinin çoğunu idare eden Ronald Graham, bu sayının birkaç bini bulabileceği görüşünde. Rutgers Üniversitesi'nden (New Jersey) András Hajnal ise, yalnızca küme teorisi alanında, en azından 100 problem sayılabileceğini söylüyor.

Erdös'ün, çalışmalarının çeşitliliği kadar, çalışma ve problem çözümünü özendirme biçimi de oldukça kayda de-

ğer. Kariyerinin başlarında Erdös, problemlerini çözenlere ufak para ödülleri vermeye başlar. Graham, bunların 10, 25, 100 dolarlık ödüller olduğunu, bu yolla hem insanların teşvik edildiği, hem de problemlerin güçlük derecesinin ortaya konmuş olduğunu söylüyor. "Bazı ödüller çok daha büyüktü" diyor Graham. "Örneğin bir tane ünlü 3000 dolarlık problem vardı. Bir de 10.000 dolarlık; gerçi bu sonun-



Kendini “kahveyi teoreme çevirmeye yarayan bir aygıt” olarak tanımlayan Erdös, matematiğe getirdiği yanıtlar kadar, problem üretme yeteneğiyle de tanınmıştı.

cusu tam bir kesinlikle ifade edilmiş bir problem değil. Bu tür yüzlerce, yüzlerce problem var.” Uyanık dinleyiciler ders notlarına bu problem ve ödülleri de kaydeder, dergi editörleri de Erdös’ün bunları makalelerinde yayımlamasına izin verirdi.

Erdös’ün, yaşamı boyunca giderek kabaran “en çok arananlar” listesi, meslektaşlarına beklenmedik kazançlar getirebiliyordu. Lucent Technologies’in (Murray Hill, New Jersey’deki) Bell Laboratuvarları’nda matematikçi olan Carl Pomerance anlatıyor: “Birkaç yıl önce Athens’a (Georgia eyaletinde) gelmişti. Arkadaşım Helmut Maier’le arabada gidiyorlarmış. Sohbet doğal olarak matematiğe ve Maier’in yeni ispatladığı bir teoreme dönmüş. Erdös ‘belki bunun için de bir ödül koymuş olabilirim’ demiş. Hemen bir kütüphaneye gitmişler. Erdös’ün gerçekten de, bir matematik dergisinde o problem için 100 dolar ödül koyduğu ortaya çıkmış. Erdös ödemeyi hemen oracıkta yapıvermiş. Ona bunun oldukça pahalı bir taksi yolculuğu olduğunu söylediğimde çok güldü.”

Ancak ödül parasını almak ki mi zaman sorun olabiliyordu. Bir problemin değeri konusunda Erdös sıkça fikir değiştirirdi. Derste bir şey söylerdi, yazılı metinde başka şey. Rakamı kendi estetik duygusuna göre değiştirmekte sakınca görmezdi. Hajnal 250 dolarlık bir problemi çözdüğü halde yalnızca 50 dolar aldığını anlatıyor. Gerekeçyse ispatın beğenilmemesi! Hajnal’ın reel sayıları farklı küme-

lere ayırma konusuyla ilgili ispatı, sayıların herhangi özel bir niteliğinden yararlanmıyor, mantıksal bir püf noktasına dayanıyordu. Erdös ayrıca Gödel’in “eksiksiz olmama” teoreminin kullandığı ispatlardan da nefret ederdi. Bu teorem, temelde, bazı önermelerin ispatlanmasının da yalanlanmasının da olanaksız olduğunu söylüyordu. Öyleyse, doğru veya yanlış olduğuna karar verilemeyecek ifadeler var demekti. 1960’ların başlarında Stanford Üniversitesi’nden matematikçi Paul Cohen, küme teorisi konusunda çok önemli bir sorunun yanıtının, hem evet hem hayır olduğunu ispatlamıştı. Hajnal, “Erdös bundan hiç hoşlanmadı” diyor. “Ve bu türden sorular için de ödül vermekten vazgeçti.”

Erdös’ün para ve bankalardan bağımsız yaşam biçimi, onun özendirme sistemini de zaman zaman altüst edebiliyordu. 1993’te Graham, bu nedenle çıkan sorunları çözebilmek için “çerçevelenmek üzere hazırlanmış” çek yön-

temini geliştirdi! Bunlar, Graham’ın olduğu halde Erdös’ün –sonradan doldurulmak üzere– imzaladığı çeklerdi. Paraya çevrilecek çekleriye Graham’ın kendisi imzalıyordu. Graham’ın söylediğine göre Erdös’ün ölümünden sonra vakıf gibi işleyen bu sistem, ona 3000 dolarlık ödül parasına malolmuştu. Henüz çözülmemiş problemler için ileride ödenecek ödül parası da 25.000 dolar civarındaydı.

Graham, bu çözümün genelde iyi işlediğini söylüyor; ama arada pürüzler de çıkmamış değil. Bunlardan biri 1999’da, şimdi California Üniversitesi’nde (Berkeley) doktora sonrası çalışmalarını yapmakta olan Ernie Croot’un 750 dolarlık bir problemi çözmesiyle yaşanmış. Problemin ana teması ise, kesirleri eski Mısır’da yazıldığı biçimiyle yazmak üzerine: Mısırlı matematikçiler, bir kesri $7/8$ gibi iki sayının birbirine oranı şeklinde yazmak yerine, onu “birim kesirlerin” bir toplamı olarak ifade etmişlerdi. Bu birim kesirlerin payı her zaman 1 oluyordu; $1/2 + 1/4 + 1/8$ gibi. Erdös meslektaşlarına bir çağrıda bulundu: Öne sürdüğü bazı kısıtlamalarca belirlenen koşullarda, verilen bir sayıyı temsil etmek için, paydanın ne kadar büyümesi gerektiğini bulmak.

Croot çözümünü açıkladığı zaman Graham ona, adet olduğu üzere Erdös imzalı bir çek verdi. “Graham bu çeki Ernie’ye bir toplan-tıda verdi” diye anlatıyor Pomerance. “Ernie o dönemde para sıkıntısı çeken bir doktora öğrencisi olduğu için, yalnızca çerçevelenip asmaya yarayacağından habersiz, çeki gidip paraya çevirdi.” Graham’sa, bankasının bu çeki Erdös’ün ölümünden sonra bile kabul etmiş olduğuna hâlâ şaşıyor.

Yine de Graham’ın bankacılık becerileri, Erdös’ün kalıcı gücünü açıklamaya yetmiyor. Bunun



Paul Erdös, hamileri Ronald Graham ve eşi Fan ile.

nedeni, problemlerin kendilerinde varolan matematiksel güç. Bunların bazılarınsa, inanılmaz ölçüde derin ve önemli olduğu anlaşılmış bulunuyor. Gnham'a göre, bu problemlerin çoğunun çekiciliği, güçlük derecelerinin bilinmemesinden kaynaklanıyor. "Lokum gibi tatlı ve yumuşak olabildikleri gibi, meşepalamudu gibi küçük olup, sonradan büyük boyutlara da ulaşabilirler" diyor Graham.

Çözümüne 10.000 dolar rekor ödül vaadedilen problem, bu ikinci tipte örneğin. Graham, bu çekin hiçbir zaman verilemeyebileceğini söylüyor. Neden olarak da, çekin, önceki sonucun "önemli ölçüde geliştirilmesi" için verileceğini ve böyle bir değerlendirmenin de önel olacağı yorumunu yapıyor. Sıradaki problemlerinse, güçlük bakımından muazzam boyutlarda oldukları anlaşılmış durumda. Örneğin, 1930'lar da Erdös, bir tam sayılar kümesiyle ilgili varsayımı ispatlamaları için, sayı teorisyenlerine meydan okumuştur. Eğer bu kümenin belirli bir "yoğunluğu" varsa, o zaman herhangi uzunluktaki bir aritmetik dizisinin (4, 8, 12, ... gibi eşit aralıklı bir sayı dizisinin) de var olması gerekliydi. 1958'de Londra'daki University College'dan Klaus Roth, Erdös'ün problemini özel bir durum için 'kısmen' çözerek matematiğin en üstün şeref payesi olan "Fields Medal" ödülüne layık görüldü. Problemi tam olarak çözen kişiye 1000 dolar alacak.

Ünlü 3000 dolarlık ödülse, benzer konuda farklı bir problemin çözümünü bekliyor: Bir tamsayı kümesindeki elemanların evrik değerlerinin (reciprocal) sonsuza gitmesi durumunda, herhangi uzunlukta bir aritmetik dizisinin var olduğunun ispatlanması. Eğer bu doğruysa, sayı teorisinde bazı önemli sonuçlara yol açmasına (asal sayılardan oluşan herhangi uzunlukta bir aritmetik dizinin var olması gibi) kesin gözüyle bakılıyor. Ancak ispat, şu ana kadar bütün çabalara direnmiş durumda. Graham'ın görüşüyse, kimsenin bu ispata kolay kolay yanaşamayacağı.

Öteki problemlerin çoğu bu kadar inatçı değil. Graham'ın değerlendirmesi şöyle: "Erdös'ün, herhangi bir konuda var olan birikimin bir düzey ötesinde problem oluşturmada doğuştan gelen, inanılmaz bir yeteneği vardı. Eğer parmaklarınızın ucunda durup biraz da zıplarsanız çözüme erişebilirsiniz.



Oraya erişmeniz ise, tırmanacağınız kayaya yalnızca bir çivi daha çakabilmiş olduğunuz anlamına geliyor."

Bu problem oluşturma yeteneğinin ne kadar ender olduğu, onu taklit etmeye cesaret edenlerin kaderlerinden anlaşılır. 1989'da Princeton Üniversitesi'nden matematikçi John Conway, tuhaf bir sayı dizisiyle ilgili bir problemin çözümü için 10.000 dolar ödül teklif etmişti. Şu sırada Basking Ridge, New Jersey'deki Avaya Laboratuvarları'nda görevli Colin Mallows, birkaç hafta içinde çözümü buldu. "Conway'in vadettiği 10.000 doları bulabilmek için neler yapmak zorunda kaldığını bilmiyorum; ama parayı gönderdi" diyor Mallows. "Bense, kendimi mahcup hissedip parayı geri gönderdim." Conway'in, ödüle paha biçerken "10.000 dolar"ı bir dil sürçmesi sonucu telaffuz ettiğini, asıl kasdettiğinin 1000 dolar olduğunu söyleyen Mallows, şöyle devam ediyordu: "En önemlisi, problemin Erdös'ünküler çapında olmayıştı. Bu nedenle John da ben de, bu sorunun çözüm süresinin dünya rekoru olarak tarihe geçmesinden oldukça utanacaktık." Böylece ikisi, 1000 dolar üzerine el sıkışmışlar.

Bu tür öykülerin sayısı yine de çok fazla değil. Matematikçilerin çoğunluğu için, Erdös'ün onlara mezar-ötesinden yetiştirmeye devam ettiği ikramiyelerle değeri belirlenmiş olan oyunlar, yetiyor da artıyor. Graham'de hâlâ Erdös imzalı bazı çekler var. Ayrıca kendisi de problemlerin çoğunun çözümünü için, belirlenmiş tutarı ödemeye hazır. Texas'ta bir bankacı, aynı zamanda da bir amatör matematikçi olan Andrew Beal de öyle. Beal, 1997'de "Fermat'ın Son Teoremi"ne benzer bir problemi çözen bir ödül teklif ettiğinde, matematik dünyasında büyük heyecan yaratmıştı. Graham, banka hesabında ödüller için her zaman bir miktar fazladan para tutmaya çalıştığını

söylüyor. Parasının bitmesiye onu çok da ilgilendirmiyor. Çünkü Graham'a göre, Erdös efsanesinin bir parçası olmak, bir matematikçi için yeterince büyük bir ödül.

Hangi taleplerin tam anlamıyla dü-rüstçe olduğuna karar vermek, para sorunundan daha büyük bir sorun haline gelebiliyor. Erdös'ün problemleri ne yazık ki oldukça düzensiz ve dağınık durumda. Nedeniyse Erdös'ün birçok üniversitede benzer konuşmalar yapması, çok sayıda dergide yine çok sayıda makale yayımlaması. Graham ve California Üniversitesi'nde (San Diego) matematikçi olan eşi Fan Chung, grafik teorisinde 125'in üzerinde Erdös problemi derlemiş ve onları 1998'de yayımlamış bulunuyorlar. Hajnal ise, bir gün bütün problemleri tek bir kitapta toplamayı umuyor ama bu düşüncenin de henüz planlama aşamasından öteye geçemediğini belirtiyor.

Tüm bu düzensizliğe karşın, matematikçilerin çoğu, kendi alanlarının Erdös'ün bu özendirmeleriyle birşeyler kazandığı konusunda fikir birliği içinde. Michigan'daki Oakland Üniversitesi'nde grafik teorisyeni olan Jerrold Grossman, Erdös'ün problemler listesinin, birçok matematikçiyi başka türlü el atmayacakları problemlere yaklaşmaya ittiğini söylüyor. "Bu biraz da Fermat'ın Son Teoremi gibi" diyor Grossman; "Bu teorem de sayı teorisinin gelişmesine yol açan birçok araştırmaya yön vermişti." Graham'sa, oldukça gerilere uzanarak bir benzetme daha yapıyor: "Problemler, Sokrates'in ünlü savunmasında sözünü ettiği atşnekleri gibi, birçok matematikçinin silkinip uyanmasını sağlamış durumda."

Seife, C. "Erdös's Hard-to-Win Prizes Still Draw Bounty Hunters" Science, 5 Nisan 2002

Çeviri: Nermin Arık

