

Aperiyodik Yazılar III Deney Tüpünden Matematik Çıkarsa

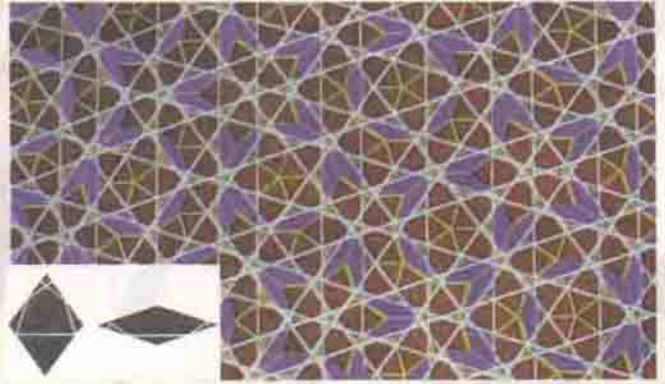
"Bir de rakı şişesinde balık olsun" der Orhan Veli, bir şiirinde. İşte bu başlığı atarken de aynı dize takıldı aklıma. Bir an matema-tiği deney tüplerine sokmanın ne kadar olanaklı olduğunu düşün-düm. Elbette, "deney tüpünden matematik çıkması" pek şiirsel değildi ve bu durum üstadı öyle fazla da etkârlendirmazdı, ama bir tutam "geometri" ile iki ölçek "lineer cebir"i bir kaba köyüp, ortaya yeni bir teorem çıkarmak da az buz bir şey sayılmazdı. Aslında bu yazıda matematik deney tüpünden çıkmak yerine o tüpe zorla giriyordu, ama olsun. Başlık, bu seferlik matematiksel düşlere ve Orhan Veli'nin dizesi-ne kurban gittiği.

Geçen sayıda Penrose karoları ile tanışmıştık. Onları özel kı-lan yanı ise, hatırlayacağınız gibi, düzlemi aperiyodik olarak kapla-malarıdır. Oysa Penrose karoları-nın çekiciliği yalnızca aperiyodik olmalarına dayanmaz. Aslında, karoların oluşturduğu desenler-de bu aperiyodik karakterleriyle pek de bağdaşmayan tam bir ko-numsal düzen gözlenmektedir. Bu konumsal düzeni görebilmek için yapılması gereken, karolara sadece birkaç doğru parçasını eklemekten ibarettir (Şekil 1). Böylelikle karolar bir Penrose deseni oluşturmak için yeniden bir araya getirildiklerinde, doğru parçaları da birleşerek beş ayrı paralel doğru kümesi meydana getirir. Eğer aynı düzlem üzerine bir heşgen çizer ve döndürmek suretiyle uygun konum verirek, her bir doğru kümesini heşgenin kenarlarından birine paralel bul-mamız da işten bile değildir. Söz konusu beş paralel doğru kü-mesi, ilk olarak Robert Ammann tarafından bulunmuş ve böylece doğrulara Ammann doğruları denilmiştir.

Öte yandan bu doğruların ilgi çeken bir özelliği daha vardır: Aralıklar... Her bir doğru kümesini oluşturan paralel doğruların arasında, diğer tüm doğru küme-leri için de aynı kalan iki tür ara-

lık vardır ki, bunlardan uzun ola-nımı U ve kısa olanını da K diye adlandırabiliriz. İşte bu aralıklar, bizi yine o "estetik" cevaba yö-neltir: U'nun uzunluğunun K'nın uzunluğuna oranı *altın ora-nı* vermektedir. Üstelik, sonsuz bir düzlem üzerinde bir doğru kümesindeki U'ların sayısının aynı doğru kümesinde K'ların sayısına oranı da altın orana eşittir. Eğer bir doğru kümesine dik ola-rak ilerlersek, önümüze çıkan aralık dizilerini U'ların ve K'la-rın oluşturduğu bir dizi olarak gö-rebiliriz. KUKUUKUKU... örneğinde olduğu gibi. Bu dizi pe-riyodik değildir ve bizlere Penro-se karolarının bir boyutlu benze-rini sunmaktadır. Hem de bu ka-roların en bildik özelliğini koru-yarak...Söz konusu özellik, hatırlarsanız, herhangi bir kaplamada-ki sonlu bir bölgenin aynı desen içerisinde yine kendini gösterdi-ği ya da tekrarladığıdır. Şimdi bu benzerliği görmek için, kalemi kâğıdı elinize alın ve aralıklar di-zimizin herhangi bir yerinden başlayarak sonlu bir uzunluktaki harf dizisini kâğıda geçirin. İnsaf-lı davranalım ve bu sonlu uzunlu-ğu 100 harfle sınırlayalım. Şimdi yine herhangi bir yerden başladı-ğınızda, bir yerlerde mutlaka ay-nı 100 harflik diziye ulaşmanız gerekir. "Gerekir" diyorum; çün-kü bu aralıklar dizisinin sonsuz uzunlukta olduğu düşünüldü-ğünde, aynı 100 harflik diziye ne-rede ulaşılacağını tahmin etmek güç...Tabii, diğer bir seçenek de tüm bunları yaptığımızı varsayıp, matematikçilere olan güveninizi tazelemek olacaktır.

Bu diziyi oluşturmanın bir yolu daha vardır. O da sonlu bir harfler (U ve K) dizisini alıp, di-zideki her U'yu UK ve her K'yı da U ile değiştirmekten ibaret-tir. Aynı yol tekrar tekrar uygula-ndığında daha uzun dizilere ulaşılır ve bunlar Ammann doğ-rularının oluşturdukları aralıklarla birebirdirler. Ancak ortaya çı-kan bu diziyi yalnızca bir harfler dizisi olarak görmek, açıkçası Fi-



Şekil 1. Eğer her bir karoya, yanda görüldüğü gibi, beyaz doğru parçaları eklenirse, bu doğru parçaları birleşerek, sürekli paralel doğruları içeren beş küme oluştururlar. Söz konusu doğrular, Ammann doğruları olarak anılırlar.

bonacci'ye haksızlık olur. 13. yüzyılda yaşamış olan Fibonacci'nin 20. yüzyılın yap-boz oyun-larını andıran bu karoları ve onla-rın aralıklarıyla ne ilgisi olduğuna gelince...Bu ilgiyi görmek için, Aperiyodik Yazılar'ın ilkin-de de bahsettiğimiz, "tavşan problemi" ni bir kez daha hatırlamakta yarar var: Fibonacci, her ay erişkin bir tavşan çiftinin (U) bebek bir tavşan çifti (K) dünya-ya getirdiğini varsayar. Ayrıca her bebek tavşan çifti, bir ay içinde erişkin hale gelmektedir. Bu du-rumda bir ay sonra her bir erişkin çift (U) yerine bir erişkin ve bir de bebek çift (UK) olacak, her bir bebek çiftin (U) yerine de bir erişkin çift (U) geçecektir. Gö-rüldüğü gibi, Fibonacci'nin tavşanları Ammann'ın aralıklarıyla aynı düzende bir tavşan toplulu-ğu ya da daha matematiksel bir deyimle "dizi" oluşturmaktadır. Üstelik Fibonacci'nin artış esası-na dayanan sonsuz bir tavşan topluluğunda erişkinlerin (U) bebek çiftlere (K) oranı da yine *altın oranı* vermektedir.

İşte Penrose desenindeki ko-numsal düzeni, Fibonacci'nin ortaya koyduğu bu ardışıklık be-lirlemektedir. Görüldüğü gibi, bu ardışıklığı da iki farklı aralığı temsil eden U ve K sağlar. Yani harfler ya da aralıklar dizimiz, iki farklı aralığın, diğer bir deyişle iki ayrı periyodik sistemin çakış-masından elde edilir. Bu nedenle de bu aralıklar dizisi, *peri-yodi-gimsi* (quasiperiodic) olarak adlandırılmıştır... Ve bu noktadan itibaren Penrose karoları, kendi-lerini yavaş yavaş, onlar için yep-yeni bir çevre olan laboratuvarı ve de kristallerin arasında bulu-verirler. Nasıl mı?

Oyunun Yeni Bir Sürümünü

Penrose, bulduğu karolarla yalnızca iki boyutlu desenler ya-ratmamış ve bu zevkli uğraşığı üçüncü boyuta da taşımıştı. Yani bir bakıma, "Penrose oyu-nu"nun daha zevkli ve daha ilgi çekici bir sürümünü karşımıza çıkı-yordu: "Bastırılmış küpler"le uzayı kaplamak gibi... Burada "bastırılmış küpler"den kastımız ise, altı yüzü de eş büyüklükteki eşkenar dörtgenlerden oluşan paralelyüzler, kısaca eşkenar pa-relelyüzler... İşte bunlar beşli si-metriye -ya da üç boyutta ikosa-hedral simetriye- sahip ve aperiyodik olarak uzayı kaplayan ya-pılar oluşturmurlar. Düzgün yirmi-yüzlü, yani ikosahedron da, üç boyutlu uzayda beşli simetrisinin bir modelidir ve yirmi ödeş üç-gen yüzden oluşur. Beşgenlerle düzlem tam olarak kaplanmadı-ğı gibi, düzgün yirmiyüzlü de uzayı tam olarak kaplayamamak-tadır. Ancak eşkenar paralelyüz çiftleri ile uzay kaplanabilir ve bunlar Penrose'un uçurtma ile ok ucunun üç boyutlu benzerle-ridir. Dolayısıyla yine her iki tipteki eşkenar paralelyüzlerin birbirine oranı *altın oranı* verir.

Roger Penrose, tüm bunlarla uğraşmaya başladığında, bulduk-larının pratikte ne işe yarayabile-ceği hakkında hiçbir fikri yoktu. Karolar, onun için sadece zevkli bir uğraşı, hatta bir oyundu. An-cak bir süre sonra, kristal formlar hakkında bilinenleri, elde ettiği sonuçların değiştirebileceğini düşündü. Bu konuyla uğraşan hemen herkesin kesinlikle doğ-ru kabul ettiği geleneksel kural-ları, Penrose kolayca kabullene-miyordu. Bu kurallar, aperiyodik yapıları yasaklıyordu, çünkü

kristallerde atomların uzayı tam olarak kaplayabilmesi için tam bir düzen içinde dizilmeleri gerekiyordu. Örneğin; bildiğimiz tuzda sodyum ve klorid iyonları bir kübün köşelerinde konumlanmışlardı ve bu küpler bir tuz kristalini doldurabilmek için tam bir düzen takip ediyorlardı.

Başta Penrose'un fikirleri pek ciddiye alınmadı, ama 1984 yılında bir anda tüm dikkatler onun üzerine çevriliyordu. Alüminyum ve manganezden oluşan küçük madeni kristaller keşfedilmişti ve bunlar şaşırtıcı bir biçimde beş kollu kar tanecikleri formundaydılar (Şekil 2). Kristallerden yansıyan X ışınları ve elektronlar Penrose'un beşli simetrisini göstermekteydi ki, bu durum kristaller üzerine tüm bilinenlerin ışığında "olanaksızdı".

Aslında bir katı maddedeki atomların dizilişi, bir deseni oluşturan karoların yerleşimiyle karşılaştırılabilir. Kristallerde atomlar ya da atom kümeleri kendini tekrarlayan motifler halinde belirirler ve bu tekrarlayan motifler -ki onlara *birim hücre* denir- birleşerek kristal bir yapı oluşturur. Ayrıca kristallerde büyük bir düzen görülür. Öyle ki bir insanın kristalin içine girdiğini farzedecek olsak; bu kişi bir *birim hücre* kadar yer değiştirdiğinde, gördüğü görüntüler arasında hiçbir fark olmayacaktır. İşte kristallerdeki bu yüksek dü-

zen, yalnızca üçgen, kare ya da altıgen ve de bunların değişik formlarıyla sağlanabilecek gibidir. Kristallerin incelenmesinde de sıkça başvurulan ve matematikte "grup teorisi" adı altında toplanan bilgiler, kristaller için yalnızca az sayıda dönme simetrisini mümkün görmektedir. Örneğin; eğer kristal, eksenlerinden birine göre 120 derece döndürülür ve kristalin kafes yapısı görünüm olarak değişiklik göstermezse, bu durumda kristal üçlü dönme simetrisine sahip demektir. Genelde ise, kristaller ikili, üçlü, dörtlü ve altılı dönme simetrisine sahiptirler.

Ancak Penrose'un ortaya koyduğu örnekler, birden fazla *birim hücre* kullanılır ve de tam bir geometrik düzen konusunda biraz taviz verilirse, beşli bir simetrisinin mümkün olduğunu göstermiştir. Bu durumda, karolar ne rastgele dizilmekte ne de muntazam bir sırayı takip etmektedir. Bir karonun yerleşimi sayesinde, diğer karoların da nasıl dizilmeleri gerektiği, anlaşılması güç de olsa, tahmin edilebilmektedir. Ayrıca her bir karo da yalnızca, özel yönlerden oluşan küçük ve farklı kümeler doğrultusunda yerleşmektedir. Örneğin; Penrose karoları, uzaktan daireye benzetilebilen, ongenlerin dağılımını göstermektedir. Bir desen içerisinde tüm bu ongenler aynı yerleşime sahiptirler

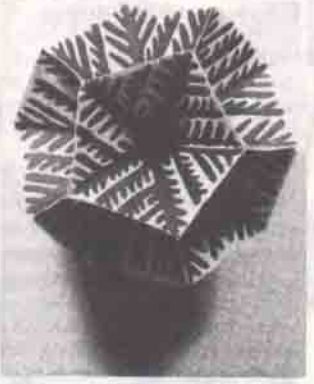
ve bir ongen diğer ongenlerin karşılık gelen kenarlarına paraleldir.

Yeni keşfedilen kristaller, hem yüksek bir düzene hem de beşli bir simetriye -ya da üç boyutlu uzayda ikosahedral simetriye- sahip görünmektedir. Bu özelliklere en uygun matematiksel model ise, Penrose karoları üzerine kurulmuş olmalıdır. Fikir, *eşkenar dörtgenyüzlü triakontahedronları* kullanmaya dayalıdır ve uzayı kaplayacak birimler olarak bu çokyüzlüler, on şişman on da zayıf eşkenar paralelyüzlünün bir araya gelmesiyle oluşmaktadır. Bu birimler, iki boyutta Penrose karoları için geçerli olan diziliş kurallarına aynen uyarlar.

Bu ilginç ve yeni kristaller elektron ışınları altında döndürüldüğünde, dağılımlar ikili ve üçlü olduğu kadar çok sayıda beşli simetri ekseninin de varlığını göstermektedir. Bu eksenler arasındaki açılar belirlendiğinde, maddemizin bir düzgün yirmiyüzlü, yani ikosahedronla, aynı simetriye sahip olduğunu söylemek mümkündür. Beşli simetri gösteren altı ikosahedral eksen, altı boyutlu bir uzayın temelini oluşturur. Sözkonusu uzayda kristal, kübik bir birim hücreye sahip olmalıdır ve bu da birim hücrelerin düzgün ve periyodik bir kristal kafes yaratacağı anlamına gelir. Ancak altı boyutlu yapı, üç boyutta bir izdüşüm olarak gözlemlendiğinde, periyotluk ortadan kaybolmaktadır. Üç boyutlu izdüşüm, *periyodik değildir*.

Yeni yapılar, normal kristaller gibi yüksek düzene sahip, ancak periyodik olmak yerine periyodikimsi olduklarından, *periyodikimsi kristaller* ya da kısaca *kristalimsiler* (quasicrystals) olarak adlandırılmışlardır. Hem de aynı Süpermen ya da Örümcek Adam gibi, iki kimlikleri vardır. Altı boyutlu uzayda, düzenli ve tamamen sıradandırlar. Üç boyutta ise, olağandışı özelliklere sahiptirler ve bilinen kristallerle hemen hiç uyuşmazlar. Bu yeni yapılar, kristaller için yeni boyutlar açmakta ve bu dalla uğraşanları da öğretilcek yeni bir matematikle yüzyüze bırakmaktadır.

Elbette, hikâyenin son noktası henüz konuşmuş değildir ve kristalimsilerin yapısını açıkla-



Şekil 2. Yukarıdaki fotoğrafta, çeşitli örneklerin farklı açılardan gözlenmesiyle meydana gelmiş ve üç boyutlu uzayda yeniden oluşturulmuş atom yapısını gösteren bir model vardır. Gördüğü gibi bu model, beş kollu bir kar tanecigi şeklindedir.

yan birden fazla model gözükmemektedir. Penrose, cam ve rastgele kaplama modelleri. Bunlardan Penrose modeli, yukarıda belirttiğimiz görüşleri ortaya koyar. Diğer bir model olan cam modeli ise, bazı kurallara bağlanmak suretiyle kısıtlanmaya çalışılsa da, Penrose modelinin aksine, "gelişigüzel" birleşme özelliğine dayanır. Şimdilerde her iki modelin de sundukları en iyi özellikleri bir araya getiren yeni bir model, rastgele kaplama modeli ortaya konmaktadır.

Sorular, sorular...

Yine bugünlerde, matematikçiler için yeni heyecanlar kapıda. İki boyutlu karolar için geçerli diziliş kurallarının yalnızca beşli değil, sekizli ve onikili simetriye sahip desenlerin oluşumuna da izin verdiği bilinmektedir. Peki, başka olasılıklar var mıdır? Aynı soru uzayı kaplayan üç boyutlu yapılar için de geçerlidir ve bu soruların cevapları, yeni kristal formlarla karşılaşarak karşılaşılmayacağımızın yanıtını da içlerinde saklamaktadır.

Peki ya "hayatımız"? Zaten o da Penrose karoları ile kurulu bir yap-boz oyununu andırıyor mu? Aperiodyik ve beklenmedik...

Han Nazmı Özsoylov

- Kaynaklar
Bergil, M.S., *Doğada, Bilimde, Sanatta Altın Oran*, İstanbul 1988
Gardner, M., *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, New York, 1989
Nelson, D.R., "Quasicrystals", *Scientific American*, Ağustos 1986
Peterson, L., *The Mathematical Tourist*, New York 1988
Steinhardt, P.J., "Quasicrystals", *American Scientist*, Kasım-Aralık 1986
Stephens, P. ve A. Goldman, "The Structure of Quasicrystals", *Scientific American*, Nisan

Çözmece

1. Metan molekülü, karbon atomu ağırlık merkezinde ve dört hidrojen atomu da köşelerde olmak üzere, düzgün bir dörtyüzlü yapısına sahiptir. Buna göre her bir hidrojen ve karbon çiftinin oluşturduğu bağlar arasındaki açı nedir?

2. (a) $x+y=1$
 $x^2+y^2=2$
 $x^3+y^3=3$
denklemler sisteminin çözümü olmadığını kanıtlayın.
(b) $x+y=1$
 $x^2+y^2=2$
 $x^3+y^3=k$

denklemler sistemi en az bir çözümü sahip olacak şekilde, k 'nin tüm değerlerini belirleyin.

Geçen Ayın Çözümleri

1. En küçük açısı n° ve tüm açılar tamsayı olan üçgenlerin sayısı, n 'nin çift ya da tek olmasına bağlı olarak

$$\frac{1}{2}(180-n)-n+1=91-\frac{3}{2}n$$

veya

$$\frac{1}{2}(180-n)-\frac{1}{2}n+1=\frac{181}{2}-\frac{3}{2}n \text{ dir.}$$

(Örneğin; $n=20$ için üçgenler $(20^\circ, 20^\circ, 140^\circ), (20^\circ, 21^\circ, 139^\circ), \dots, (20^\circ, 80^\circ, 80^\circ)$ açılarna, $n=21$ için $(21^\circ, 21^\circ, 138^\circ), (21^\circ, 22^\circ, 137^\circ), \dots, (21^\circ, 79^\circ, 80^\circ)$ açılarna sahip olacaktır). Bu nedenle tüm açılar tamsayı olan üçgenlerin toplam sayısı

$$\sum_{k=1}^{30} \left[\left(91 - \frac{3}{2}(2k) \right) + \left\lfloor \frac{181}{2} - \frac{3}{2}(2k-1) \right\rfloor \right] = \sum_{k=1}^{30} (183-6k) = 2700 \text{ olur.}$$

2. x asal ve $z-y > 1$ olsun. O zaman

$$x^n = z^n - y^n = (z-y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \dots + y^{n-1}) \text{ olur.}$$

Bu durumda $k < n$ şeklinde bir doğal sayı için

$$z-y = x^k \text{ ve } z^{n-1} + z^{n-2}y + \dots + y^{n-1} = x^{n-k} \text{ elde edilir. Böylelikle,}$$

$$x^{n-k} > z^{n-1} = (x^k + y)^{n-1} > x^k(n-1) \text{ olur ki, bu da } n-k > nk-k, \text{ yani } n > nk \text{ sonucunu verir. Ancak bu mümkün olamayacağından, } z-y > 1 \text{ için } x \text{ asal olamaz. Aynı şekilde } z-x > 1 \text{ için de } y \text{ asal olamaz.}$$