

İdeal Kâğıt, Cetvel-Pergel'e Karşı Açığı Üç Bölme

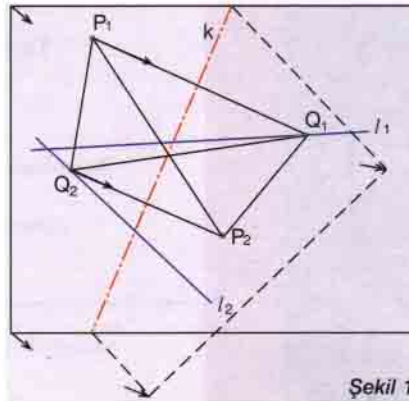
Açıyı üçe bölmekten ne anlaşılması gerektiğini hatırlıyor musunuz? 360 derece ve onun 2'ye, 4'e, 8'e, ...2ⁿ'ye bölünmesiyle elde edilebilecek açılar dışında, herhangi bir açının üç mutlak eşit parçasından birinin geometrik olarak elde edilmesidir istenilen. "Geometrik olarak" ise, "sadece cetvel ve pergel işlemleriyle" dar anlamına geliyor. Bunun tabu olduğuna inananlardansanız, Bilim ve Teknik'in 364. sayısı (Mart, 1998) sizi hazırlıksız yakalamış olmalı. Derginin 33. sayfasında, "Açı Nasıl Üç Bölünür?" başlığı altında, serinkanlılıkla "İşte böyle ..." deniyor, "1. ...2. ...3. ...".

Okul yıllarında karşılaştığımız, öğrenilen matematikle çelişkili gibi görünen, ikinin beşe eşit olduğunu ispatlamak, 19 deveyi parçalamadan üç oğula bölüş-türmek gibi acaiplikler arasında, bazan açığı üçe bölmek de yer alırdı. Sergilenen "ispat"ların bozuk halkasını her seferinde keşfedemsek de, yalnız cetvel ve pergel kullanarak mümkün olmadığını birilerinden duyduktan sonra, açığı üçe bölmeyi yasaklar listesine kaydedip rahatlamıştık. Ama şimdi Hisashi Abe adında biri, iddiaya göre, üçe bölemediğimiz açımızı üzerine çizmiş olduğumuz kâğıdı alıyor; hepimizin bildiği katlama-açma operasyonlarını uygulayarak bölüveriyor üç eşit parçaya. "Olamaz!" deseniz de, ispat karşınızda; çerçeve içinde tekrar veriyoruz.

Origamide usta olmasak bile, yöntemde önerilen işlemler, mektup katlamadan kâğıt uçak, kayık yapmaya, alışık olduğumuz, hattâ zevk aldığımız şeyler. "Katlama" deyince bize çok basit, kolay, ve kesin birşeymiş gibi geliyor. Şu ucu buradan katlayacaksın; bu kenarla ötekini üstüste getirip tekrar katlayacaksın, sonra açıp bir de şuradan şöyle katlayınca... Bir de bakıyorsunuz açığı üçe bölünmüş. Acaba gerçekten de o kadar kolay mı? Cetvel-pergele (C-P) boyun eğmeyen bir problem katlamaya niçin yenilsin? Acaba katlama ile C-P işlemleri arasında kendini pek de açıkça göstermeyen bir bağ, bir eşdeğerlilik olamaz mı? Yoksa katlamanın C-P ikilisine göre bir üstünlüğü mü var?

Önerilen bazı işlemlerin rahatça yapılamayabileceği, hattâ belki de

mümkün olmayabileceği izlenimi veren bir takım ipuçları var satır aralarında. 2. adımda, aşağıda tanışacağımız (O6) aksiyomu uygulanırken, "Bunu yapmak kolay olmayabilir! (Daha doğrusu öyleymiş, çünkü denemeye cesaret dahi etmiyorum.)" yorumuyla karşılaşıyoruz. Üstelik bir yorum daha: "Belki birkaç denemeye katlama için doğru yer belirlenebilir." (İtalikler bizden.) İş denemeye kaldıysa, pergelle uygulanabilecek birkaç denemeye, her açı belki doğru şekilde üçe bölünebilirdi. Veya, denenmesi sizi rahatsız etmeyecekse, pergelle bir türlü bölemediğiniz açılarınızı teslim edin Hisashi Abe'ye; sonuç garantili. Niçin garantili? Çünkü yukarıda sözü edilen üç adımda bir matematiksel ispat gerçekleşiyor. Ergo: Her açı, kâğıt katlamanın karşı konulamaz avantajları sayesinde pekâlâ üçe bölünebilir!



Şekil 1
Huzita'nın (O6) Aksiyomu: Üzerinde P_1 , P_2 noktaları ve l_1 , l_2 doğruları belirlenmiş olan bir kâğıt, P_1 noktası l_1 , P_2 noktası l_2 üzerine gelecek şekilde katlanabilir. k katlama eksenini gösteriyor. Buna dik olan P_1Q_1 ve P_2Q_2 doğruları paraleldir. Ayrıca, $P_1Q_2 = Q_1P_2$ ve $P_1P_2 = Q_1Q_2$ dir. Q_1 , Q_2 ve k 'yı cetvel-pergel kullanarak bulabilir misiniz?

İleri sürülen yöntemin nihai başa-rısı, üzerine kurulduğu ve kâğıt katlamayla ilgili aksiyomlara, özellikle de onlardan birine dayanıyor. Bu aksiyom, Humiaki Huzita adında başka bir ustanın altı aksiyomundan, yani Origami Aksiyomları'ndan, (O6) kimliğini taşıyan sonuncusu. Şöyle tanıtılıyor (O6) bir önceki sayfada: " p_1 ve p_2 noktaları ile l_1 ve l_2 doğruları verildiğinde, p_1 noktasını l_1 ve p_2 noktasını l_2 doğrusu üstüne getirecek bir katlama yapabiliriz." Abe'nin açığı üçe bölme yöntemini bir zincire benzetirsek, onu geliştirirken dayandığı en kritik halka bu. Halkayı ödünç aldığı Humiaki ustaya ne kadar güvenebiliriz? Acaba aksiyomunda yanlışmış olamaz mı? Eğer, "Aksiyom aksiyomdur; doğruluğundan ya da yanlışlığından söz edilemez, onlar üzerlerine teoremlerin kurulması için yapılmış varsayımlardır." diyorsanız, o zaman, "Bir açı C-P ile üçe bölünebilir." de bir aksiyom olarak kabul edilemez miydi? Belki de, sadece C-P kullanarak yapılabilen önceki işlemleri tanımlayan aksiyomlara o da eklenseydi, sorun ortadan kalkardı.

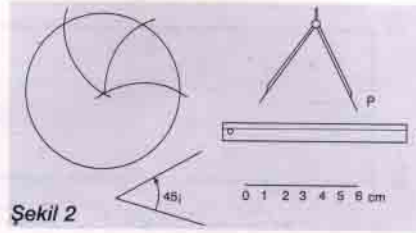
Bu altıncı aksiyomu kendinden önceki beş aksiyomla karşılaştırsaydınız şunu görecektiniz. Huzita'nın (O1)-(O5) aksiyomları, katlamada yeterli el beceriniz olmasa bile, C-P yardımıyla buluvereceğiniz, katlama ek-seni, katlamadan sonra üstüste gelecek noktalar veya çizgiler yardımıyla kolayca ve sonlu sayıda operasyonla gerçekleştirebileceğiniz şeyler. Halbuki (O6) pek öyle gibi görünmüyor. Şekilde (O6) nın nasıl elde edildiğini görüyorsunuz. Kâğıdı noktalı çizgiyle gösterilen katlama eksenini k 'dan kat-

larsanız, kâğıdın soldaki kanadı sağda kesik çizgiyle gösterilen konuma gelirken, P_1 noktası l_1 doğrusunun Q_1 noktasına, l_2 doğrusunun Q_2 noktası da P_2 noktasına konuşlanır. Aşağıda "katlama"dan ne anlaşılması gerektiğini gözden geçireceğiz. Ona göre, bütün mesele k eksenini bulmaya indirgenebilir. Bunun için ise Q_1 ve Q_2 noktalarından birini bulmuş olmanız yeter. İyi ama nasıl? "Katlayarak" diyemezsiniz, çünkü henüz katlamayı yapacağınız eksenini bilmiyorsunuz. Aklınıza C-P geliyorsa, işte çözmenizi bekleyen çizim problemi: P_1 ve P_2 den geçen öyle iki paralel doğru çizim ki, bunlardan ilki l_1 i Q_1 , ikincisi de l_2 yi Q_2 noktalarında kesiyorsa, $P_1Q_2=Q_1P_2$ ve $Q_1Q_2=P_1P_2$ olsun. Pe ki, bunun C-P çözümü var mı? Unutmayın, işin sonunda l_1 ve l_2 arasındaki açının üç bölünebilmesi yattıyor. Q_1 veya Q_2 yi bir kere elde ettiyseniz, l_1 ile l_2 arasındaki açıyı bölmek için geriye kalan işlemler, C-P ile rahatça tamamlayabileceğiniz şeyler. Belki siz de bu çizimin başarılı olacağından ümidinizi kesmeğe başladınız. Eğer öyleyse, geriye kalan tek ümit kapısı, katlamanın C-P yönteminden üstün olabileceği ihtimaline açılıyor; ve insan, kâğıt katlama ile C-P işlemleri arasında ne gibi ilişkiler olabileceğini, veya aralarında bazı bağımsızlıklar bulunup bulunmadığını düşünmeden edemiyor.

Niçin Cetvel ve Pergel?

Çoğumuzun hiç değilse ilköğrenim sırasında kullandığımız bu çizim âletlerinin özellikleri ne? Niçin başka âletler, meselâ terzilerin kullandığı eğri cetvel, spiral çizme düzeneği, birbirine eklemelenmiş dört çubuklu bir mekanizma kabul edilmiyor da, sâdece düz bir kenarı olan cetvelle, değişik yarıçaplarda daire çizebilen pergele izin veriliyor? Çünkü bunlar düzlem geometride (Euclid geometrisi) çok temel olan çok basit iki işlemi gerçekleştirmek için yegâne basit âletler.

- İki noktayı birleştiren tek bir doğru çizgi vardır, ve cetvel bu çizgiyi çizmemizi sağlar; yani bu doğru çizgi üzerindeki bütün noktaları cetvel yardımıyla bulabiliriz.



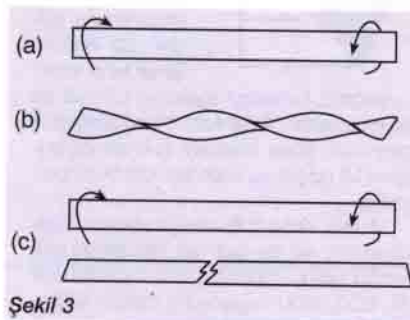
Şekil 2

Sâdece cetvel ve pergel kullanarak,
a) daireyi altıya, b) 45° yi üçe, c) 6 cm'lik
doğru parçasını yediye, bölebilir misiniz?

- İki nokta arasındaki uzaklığı (ki bu en kısa yol demektir) başka bir yere pergel kullanarak taşıyabiliriz.

Tabii burada ideal bir cetvelden, ideal bir pergelden ve ideal işlemlerden söz ediyoruz. Gerçek cetvel ve pergeldeki hatâlar, onlarla birlikte kullandığımız kalem ucunun kalınlığı, kağıdın kalitesizliği, bizim yapabileceğimiz yanlış ve beceriksizlikler elde edeceğimiz sonucu önemli ölçüde etkiler. İsterseniz pergelinizle bir daire çizip, sonra da üzerindeki bir noktadan başlayarak, pergel aralığını bozmadan, çevresinde altı adım atarak başladığınız noktaya dönmeye çalışın. Teorik olarak bunun mümkün olduğunu biliyoruz. Ama, ne kadar titiz ve dikkatli olursanız olun, tam tamına aynı noktaya dönmek için sonsuz şansınız olması gerek. Göremediğiniz hatâlar mikroskop altında mutlaka görünür. Benzer şekilde, bir doğru parçasının bir tek orta noktası vardır, ama siz, her deneyişinizde ona çok yakın başka başka orta noktalar bulursunuz.

Bunlar hiç önemli değil. Asıl olan, ancak düşüncemizde yer alan ideal noktalar, ideal doğrular, ideal daireler,



Şekil 3

İdeal kâğıt âdi kâğıda karşı,

(a) Uzun bir kâğıt şerit boylamasına bu-
rulacak şekilde zorlanıyor.

(b) *Burulma olursa sonuç bir sarmaldır (helis) ve kâğıt gerçek kâğıttır.*

(c) *Burulma olmuyorsa (veya kâğıt kırıldıysa) ideal kâğıttır.*

Büyük bir küreyi gerçek kâğıt parçalarıyla kırıksıklık yaratmadan kaplayabilirsiniz, ama ideal kâğıtla bu imkânsız.

ideal eşitlikler, ve ideal işlemler. Ne gerçekten çizgi çizmemize gerek var, ne de nokta göstermemize. Zaten bütün ispatlarımızı da düşünce uzayında yapmıyor muyuz? Eğer bunu yaparken, düşüncelerimizi biraz somutlaştırarak düşünce akışını kolaylaştırmak üzere şekillere başvurmak ihtiyacını duyuyorsak, onu bile sadece kalem ve kâğıt kullanarak, elle çiziyoruz. Yani çizim daima yardımcı; ne kadar mükemmel, ya da ne kadar kaba olursa olsun! Böylece, ancak düşüncemizde var olan ideal cetvel ve ideal pergelle yapabileceğimiz bakın neler var: Belli bir noktadan geçen herhangi bir doğruyu, veya belli iki noktanın ikisinden de geçen doğruyu çizmek; merkezi verilen bir nokta olan, belli yarıçapta daire çizmek (yani o noktadan uzaklıkları belli bir uzunluğa eşit olan bütün noktaları elde etmek); verilen bir açıya eşit bir açı kurmak; bir doğru parçasını tam sayıda eşit parçalara bölmek; bir açıyı iki, dört,...² eşit parçaya bölmek; elips, parabol veya hiperbolü nokta nokta çizmek;...ve daha pek çoğu. Ne yazık ki herhangi bir açıyı üç eşit parçaya bölmek bunlar arasında yer almıyor. Siz belki gerçek cetvel ve gerçek pergelinizi ustaca kullanarak bunu herkesçe (tabii matematikçiler dışında) kabul görececek düzeyde başarabilirsiniz. Ama ispat edemezsiniz. İşte matematikle uygulama arasındaki fark bu kadar ince, ve yine de kabul edilmeyecek kadar büyük.

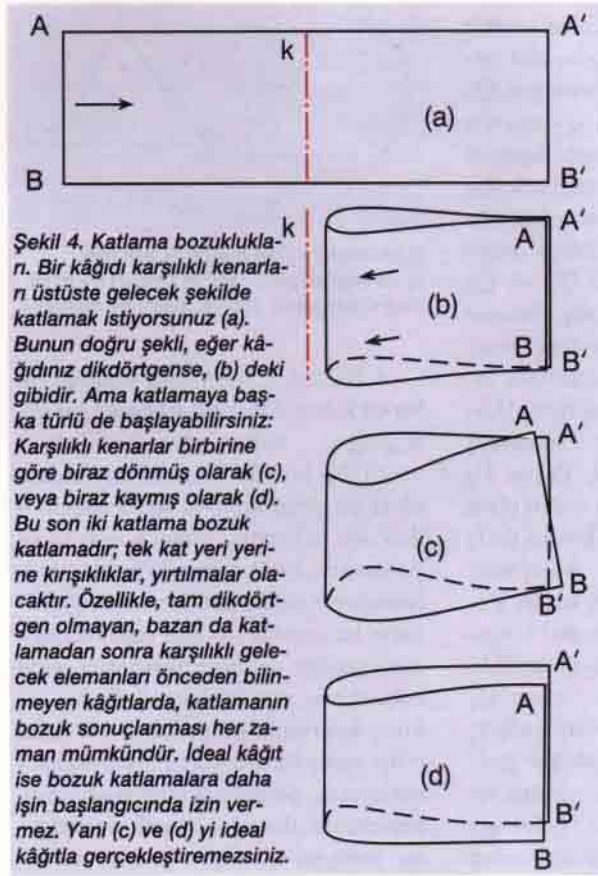
Gerçekte kullanılan cetvel ve pergel birbirinden çok farklı âletler gibi görünse de, ideal cetvelle ideal pergel arasındaki fark aslında çok önemsiz. Pergeli, cetvel üzerinde nokta belirlemekten kaçınmak için kullanırız. Pergelin iki ucu arasında belirlenen sabit uzaklığı, cetvelin kenarı üzerinde işaret edeceğimiz iki nokta arasına taşıdığımızı düşünersek (bunun tersini de yapabiliriz), cetveli pergel gibi kullanabilmek için yapacağımız tek şey, bu işaretlediğimiz noktalardan birini kâğıt üzerinde belirlenen bir noktaya sürekli çakışmış olarak tutarken öteki noktanın alabileceği her konumu, cetveli döndürerek belirlemek olurdu. Burada açıkça söylenmeyen varsayım, ideal cetvelin (veya açıklığı belirlenmiş pergelin) ideal katı cisim gibi dayrandığı; yani şeklini, boyutlarını hiç değiştirmedeği.

İdeal Kâğıt Çok İnatçıdır

Hepimizin çok iyi bildiği gerçek kâğıtlar, kendilerinde bulunduğunu sandığımız, ya da onlara yakıştırdığımız özellikleri her zaman çok iyi gösteremez. İslanmadıkça, aşırı zorlanmadıkça farkına varılmasa da, katlanırken boyutlarını az veya çok değiştirebilirler. Katlamalar ve diğer işlemler sonunda elde etmeyi beklediğimiz matematiksel sonuçlar ancak ideal bir kâğıtla elde edilebilirdi. O halde, ideal kâğıdı tanımlamak gerekiyor. Bunun için ideal kâğıdın aşağıdaki özelliklerini bilmek yeter:

- Kalınlığı yoktur (sıfırdır).
- Hiç direnç göstermeden kıvrılabilir, bükülebilir, katlanabilir.
- Üzerine çizilebilen bütün doğru ve eğri çizgilerin uzunlukları değişmez; dolayısıyla, bunların oluşturabileceği açılar, alanların değeri kıvrılma veya katlama ile değişmez.
- Bütün noktaları bir düzlem üzerine çakıştırılabilir.

Bu özellikleri sayesinde, bir ideal, düzlem kâğıt istenildiği gibi eğilip, bükülüp, katlanıp, buruşturulduktan sonra, tekrar açılarak düzlem hâline getirilebilir; bu işlemler sonucunda, üzerinde bulunan çizgi, şekil ve açılar



da hiçbir değişiklik olmaz. Bu bakımdan, ideal kâğıda iki boyutlu ideal katı cisim gözüyle bakabilirsiniz. Halbuki, gerçek kâğıdı katlayıp, kat yeri belirginleşsin diye parmağınız ve tırnağınız arasında sıyırmışsanız, açtığınızda

artık eski, düzlem hâline gelmediğini görürsünüz. Kat izi boyunca kâğıt uzamıştır. İdeal kâğıtta bu olmaz.

Gerçek kâğıttan ince, uzun bir şeridi iki ucundan tutarak burabilir, burğu şeklini verebilirsiniz. İdeal kâğıtta bu da mümkün değil! Niçin mi? Burulmadan önce, şeridin iki paralel uzun kenarı ile bunların arasındaki orta eksen tam tamına eşit uzunluktadır. Burulunca iki kenar, tıpkı çift DNA sarmalı gibi, helis hâline gelirken orta eksen doğru olarak kalır. Ama bunun için kenarların uzaması, bu uzama sonucu oluşan iç kuvvetleri dengelemek üzere de, ek-

senin kısalması gerekir. Yalnız kâğıt değil, çelik, hattâ ondan daha da katı olan elmadan yapılmış bir şerit bile burulmaya karşı koyamazken, ideal kâğıt bunu yapmanıza inatla direnir, çünkü doğasına aykındır. Çok rijit bir boruyu buramadığınız gibi onu da buramazsınız. Ama öte yandan, her türlü eğmeye, bükmeye, ve tabii katlamaya da hiç direnç göstermez; yeter ki, üzerine çizildiğini düşünebileceğiniz, doğru ya da eğri bütün çizgilerin uzunlukları değişmek zorunda kalmassın. Buna gerek var; aksi hâlde katlamadan sonraki uzunlukları önceliklerle nasıl karşılaştırır, nasıl matematik kesinlikte ispatlar yapabilirdik?

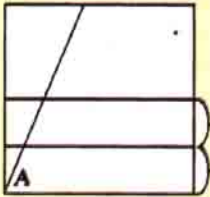
Nasıl Katlamalı?

Önce gerçek bir kâğıdı nasıl katladığımızı hatırlayalım. Gerçek kâğıtla, hemen hiçbir zaman farkına dahi varmadığımız bir kolaylıkla başardığımız pek çok katlamada bu kolaylığı nelere borçlu olduğumuzu hiç düşündünüz mü? Söyleyelim; iki şey çok önemli:

1. Çoğu zaman kâğıdımız açılmış durumdayken dikdörtgen veya karedir. Katlarken ilk adım olarak mevcut kenarları, köşeleri veya buna benzer

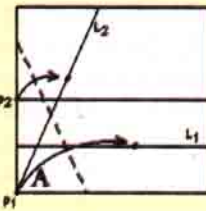
Açı Nasıl Üçe Bölünür?

İşte böyle... 1970'lerde Hisashi Abe'in geliştirdiği bu yöntemle:

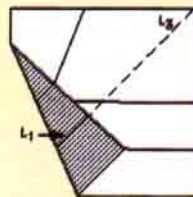


1. Üçe böleceğimiz açı, kâğıdımızın alt sol köşesinde bulunsun. Bu açığı A diyelim. (Unutmayalım ki, burada A'nın bir dar açı olduğunu varsayıyoruz, fakat bu yöntemi geniş açılara uyarlamak da son derece kolaydır.) Şimdi de alt kısımda, birbirine paralel ve eşit uzaklıkta katlama çizgileri oluşturalım.

2. Sıra (O6)'yı uygulamaya geldi. p1'i L1, p2'yi L2 üzerine katlayalım. Bunu yapmak kolay olmayabilir! (Daha doğrusu öyleymiş, çünkü denemeye cesaret dahi etmiyorum.) Belki birkaç de-



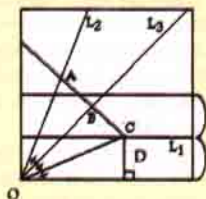
nemeye katlama için doğru yer belirlenebilir.

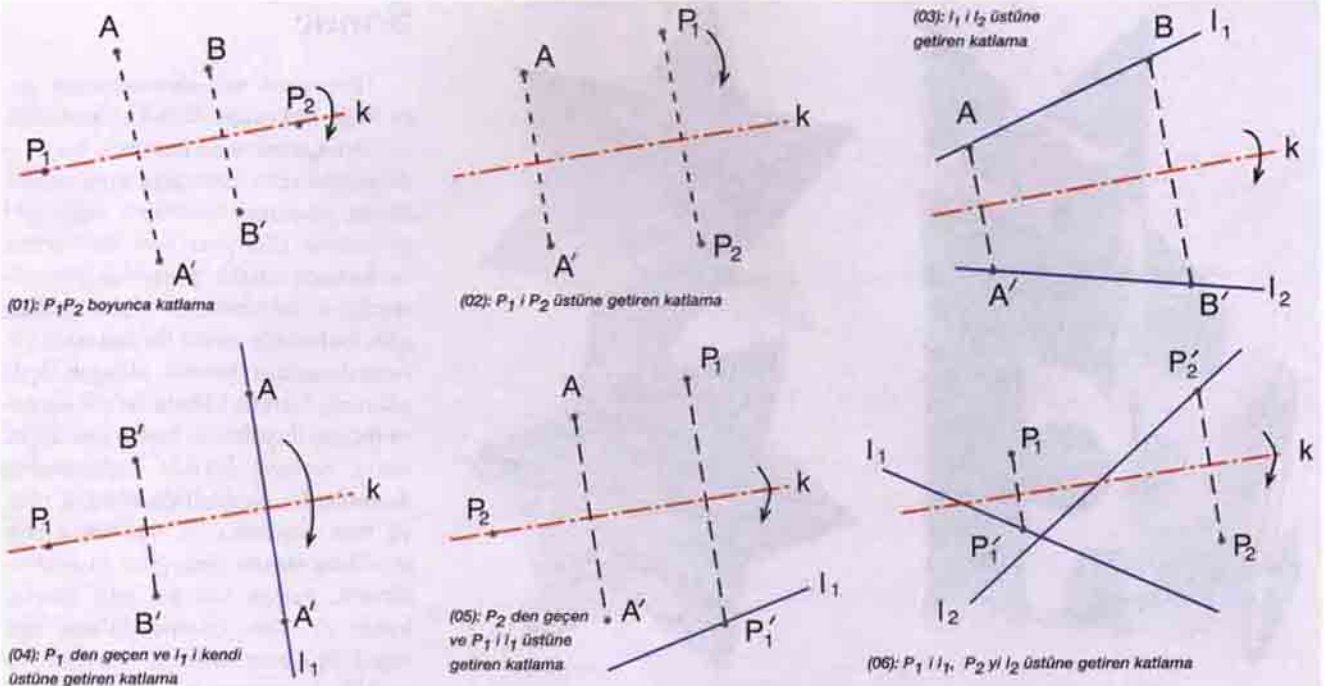


3. L1 doğrusunun katlanmış kısmında kalan (yani kâğıdın arka yüzünde) kısmını uzatalım ve elde ettiğimiz yeni çizgiye L3 diyelim. Şimdi ikinci adımda yaptığımız katlamayı açalım ve L3'ü alt sol köşeye uzatalım. Dikkat edin, çünkü uzattığınız çizginin tam köşe noktasını bulması gerekli. Sürpriz! L3 çizgisi, şu anda tam olarak A açısını veriyor.

İyi ama, neden? Bu soruyu yine şekil üzerinde yanıtlamak da yarar var. Görüldüğü gibi, şeklimize birkaç çizgi daha eklendiğinde, artık AOB, BOC, COD üçgenlerinin benzer üçgenler olduğunu görmek oldukça kolay hale geliyor. Böylelikle AOB, BOC ve COD açıları birbirine eşit olduğundan, elimizde A/3 açısı kalıyor.

H. N. Özsoylev
Bilim ve Teknik Dergisi
Mart 1998





Şekil 5. Huzita'nın altı Origami Aksiyomu. P_1, P_2 verilen noktalar, l_1, l_2 verilen doğrular; A, B gelişigüzel seçilmiş noktalar; k katlama eksenini; P_1', P_2', A', B' katlamadan sonra P_1, P_2, A ve B nin üstüne gelecekleri eşlenik noktalar. İlk beş aksiyomu pratikte gerçekleştirmek için gerekli olabilecek ek noktalar P_1', P_2', A', B' ve katlama eksenini k , cetvel-pergel yardımıyla kolayca elde edilebilir. (06) ise, bir ideal kâğıt bükülerek P_1 noktası l_1 üzerinde kaydırılarak, l_2 doğrusunun P_2 ile çakıştığı durumda katlama tamamlanır. İdeal kâğıtla, ilk beş aksiyom olan (01)-(05) de daha kolay gerçekleştirilebilir.

"görünen" bazı elemanları üstüste getirmeye çalışırız ki bu kolaydır.

2. Daha sonra, asıl "katlama"yı gerçekleştirirken, çoğunlukla farkında bile olmadan, kâğıdın üstüste dokundurduğumuz iki katının birbiri üstünde biraz kayarak, biraz dönerek, katlamanın son durumunda alacakları konumlara kendilerini ayarlamalarına izin veririz. Yani başlangıçta olabilecek küçük hatâların kabul edilebilir bir düzeye inmesine yardımcı oluruz.

Ne demek istenildiğini aşağıdaki deneyleri yaparak daha kolay anlayabilirsiniz. Önce gelişigüzel kesilmiş âdi kâğıtla şöyle bir katlama gerçekleştirin: Kâğıdın üzerine gelişigüzel iki nokta işaretleyin ve sonra bu iki noktayı üstüste getirerek katlamayı tamamlayın. Deneyi birkaç kez tekrarlayarak, katlama sırasında ne yaptığınıza, ne gibi kolaylıklar sağladığınıza, ve sonunda ne kadar başarılı olduğunuza çok iyi dikkat edin. Özellikle, iki noktayı üstüste getirmenin kolay olduğunu, ama bunu yaparken üstteki kâğıdın alttakine göre bazan biraz sola, bazan biraz sağa dönmüş olabildiğini fark etmişsinizdir. Böyle olunca da, iki noktayı üstüste getirdikten sonra kâğıdın üst ve alt katlarının birbirine göre dönmesine izin vermeden, katlama iş-

lemine katlama çizgisine kadar sürdürürseniz, kırışıklıkların ve düzlemde sapmaların meydana gelmesini önleyemezsiniz.

İkinci deney bu sonuçları çok daha çarpıcı şekilde ortaya koyar. Yukarıdaki deneyi, kâğıt yerine, paket yapmada kullanılan geniş yapışkan bantlardan keseceğiniz bir parça ile tekrarlayın. Ama bu sefer katlarken yapışkan yüzler birbirine değecek. Artık yukarıda sözünü ettiğimiz ikinci kolaylıktan istesene de yararlanamazsınız. Noktaları karşı karşıya getirip daha ilk teması yapar yapmaz, bundan geri dönmeyiz, veya kaydırarak, döndürerek ayarlamamız artık mümkün değildir. Doğrudur, kabul edilebilir bir katlama yapabildiyse, ya çok yetenekli ya da çok şanslı olmalısınız. Denemelerin büyük çoğunluğunda, tek, ideal katlama eksenini yerine, az veya çok sayıda kırışıklıklar, katlar oluştuğunu görürsünüz.

Gerçek kâğıdı katlarken yararlanabildiğiniz bu kolaylık, yani döndürerek ayarlama, aslında gerçek kâğıdın sahip olduğu uzayabilme, kıvrılabilme gibi özelliklerin sağladığı bir imkân. İlk bakışta bu bir avantaj gibi görünse de, altında yatan belirsizlik yüzünden katlamanızı da matematiksel bakım-

dan belirsiz yapıyor. Yani gerçek kâğıtla, sadece iki noktayı bir defada üstüste getirerek, tek katlama çizgisi olan, ideal bir katlama yapamazsınız; denemeniz gerek. Deneme ise matematikte geçersiz. Ama ideal katlamayı yine de çeşitli yollarla gerçekleştirebilirsiniz. Üstüste gelmesi istenen iki noktayı birleştiren doğruyu çizdikten sonra, noktaları çakıştırırken bu doğrunun iki yarısını da birbiri üzerine çakıştırarak; veya noktaları birleştiren doğrunun orta dikmesinin katlama çizgisi olduğunu hatırlayıp bunu kullanarak; veya üstüste gelecek başka bir nokta çifti daha elde edip öteki çiftle birlikte onu da çakıştırarak...

Bütün bu yolların aslında birbirine denk olduğu, çakışacak iki nokta verdikten sonra, hem katlama ekseninin, hem de çakışması gereken başka eleman çiftlerinin (nokta veya çizgi) C-P ile kolaylıkla elde edilebilmesinden anlaşılabilir. Böyle iki çift eleman bulunduğundan sonra, bunlar çakıştırılarak tamamlanan bir katlama ideal katlamadır; yani ideal kâğıtla mümkün olabilecek yegâne, doğru katlama.

Huzita'nın ilk beş aksiyomu gerçek kâğıt ve C-P kullanarak açıklanan katlama yöntemi ile gerçekleştirilebilir: Üstüste çakışacak farklı iki çift



Sonuç

Huzita'nın son aksiyomunun geçerliliği, kullanılan kâğıdın ideal kâğıt olmasına, yani onun herhangi bir yönde uzama veya kısaltmaya karşı sonsuz direnç gösterme özelliğine bağlı gibi görünüyor (aksiyom ileri sürülürken bu konuda titizlik gösterilip gösterilmediğini bilmiyoruz). Tabii bunun için, katlamada yalnız iki noktanın çakıştırılmasının yeterli olduğu ispat edilmeli. Gerçek kâğıtta iki çift noktaya ihtiyaç duyulması, katlamaya doğru sonuç verecek şekilde başlanmadığı durumlarda, sapıklığı düzeltecek yönde bazı kaydırma ve döndürmelerin mümkün olması gerçeğine dayanıyor. Meselâ, gerçek kâğıdı, bazı sınırlar içinde de olsa, üzerine çizilmiş eşit uzunlukta, ama simetrik olmayan AB ve A'B' doğru parçalarını üstüste getirecek şekilde bükümlersiniz, ama bu sizi ideal katlamaya götürmez; bunun için doğru parçalarının simetrik olması gerekir, ve simetri eksenini aynı zamanda katlama eksenidir. O halde problem şu teoremin ispatına indirgenmiş görünüyor: İdeal kâğıt üzerindeki eşit uzunlukta olan fakat, düzleme açındırıldığında simetrik olmayan iki doğru parçası üstüste çakıştırılmaz. Veya: İdeal kâğıdın bükülerek üstüste getirilmiş iki parçası, birbirine göre döndürülemez. Teoremi ispat etmek üzere bir yaklaşım, bunun aksinin yapılabilmesi için, ideal kâğıt özelliklerinin dışına çıkılması gerektiğini (meselâ çizgi uzunluklarının veya açılarının değişmesi, ya da ideal kâğıdın burulması) göstermek olabildi. Denemek ister misiniz?

Suha Selamoğlu

nokta (veya geometrik eleman) elde ederek. Gördüğünüz şekillerde her aksiyom için P_1 , P_2 verilmiş noktaları; I_1 , I_2 verilmiş doğruları; A, B,... gelişigüzel seçilmiş noktaları ve A', B',... onların çakışacağı eşlenik noktaları; k ise katlama eksenini göstermektedir. Ama (O6) aksiyomu için, yani katlamada ayrı ayrı iki noktanın herbirinin ayrı iki doğru üzerine gelmesi için, A, A' ve B, B' gibi eşlenik noktalar artık C-P ile bulunamaz.

Son Ümit: İdeal Kâğıt

Şimdi son bir ümidimiz kaldı (O6) yı kırtarmak için: İdeal kâğıt. Acaba ideal kâğıt kullanıyor olsaydık, onu katlamak için de yine bir-biriyle çakışacak iki ayrı nokta çifti mi bulmamız gerekecekti? Yoksa, meselâ sâdece bir çift noktanın üstüste getirilmesi yetecek, bunu yapınca diğer bütün eşlenik noktalar, katlama işlemi ilerledikçe, otomatik olarak üstüste gelivercek miydi? İdeal kâğıdın, şerit halindeyken burulmaya karşı gösterdiği sonsuz direnç gibi, katlarken de başlangıçta iki noktasının üstüste

getirilmesi, bir ve ancak bir şekilde, yani ideal katlamaya götürecektir şekilde gerçekleşebilir olamaz mıydı? Eğer öyle ise bu, ideal kâğıdın gerçek kâğıda üstünlüğünü gösterir: İdeal kâğıdın iki noktasını ancak ve ancak tek bir şekilde, yani ideal katlamada eşlenik olacak şekilde, üstüste getirebilirsiniz ki, bu da kesinlikle sizi doğru sonuca götürecektir bir işlemdir. Bu üstünlük, aynı zamanda ideal kâğıt katlamanın C-P işlemlerine de üstün olduğu anlamına gelir. (O1)-(O5) aksiyomları bile çok daha zahmetsizce, birer eleman çakıştırmakla elde edilebilir. Ve artık

(O6) ideal kâğıtla ve sonlu sayıda operasyonla şöyle gerçekleştirebilir:

- P_1 noktası I_1 üzerinde herhangi bir Q_1 noktasına getirilir. Bu sırada P_2 de kâğıdın başka bir Q_2 noktasına dokunmaktadır.

- P_1 noktası I_1 üzerinde kaydırılırken Q_2 izlenir ve onun I_2 ile çakıştığı andaki konumu sabit tutularak katlama tamamlanır.

Gerçek kâğıtla bunu yapamazdınız, çünkü P_1 ile I_1 çakıştırılırken, kâğıt değişik yönler alabilirdi. İdeal kâğıtta bu ancak tek bir yönde, doğru olan yönde, mümkündür.

